Лекция 2

Основные понятия теории групп

2.1 Классы

Правые смежные классы. Индекс

Чтобы разобраться со структурой групп, введем понятие смежных классов. Пусть H — подгруппа, а g — элемент группы G. Обозначим Hg множество, состоящее из произведений элементов подгруппы на g: $Hg = \{h_i g, h_i \in H\}$.

Определение 2.1. *Правыми смежными классами* группы G по подгруппе H называются множества $Hg_k, g_k \in G$.

Вся группа G разбивается на классы $G = Hg_1 + Hg_2 + \cdots + Hg_n, n = |G|$, где мы пишем знак “$+$”, а подразумеваем объединение множеств “$\cup$”. Аналогично, можно было бы разбить группу на левые смежные классы $G = g_1H + g_2H + \cdots + g_nH$. Число классов получилось бы тоже самое, но сами классы были бы, вообще говоря, другими.

Теорема (Лагранжа). *Правые смежные классы не пересекаются либо совпадают.*

Пусть нашелся элемент $g \in G$, который лежит сразу в двух смежных классах: $g \in Hg_1, g \in Hg_2$. Тогда по определению правого смежного класса найдутся такие $h_1, h_2 \in H$, что $g = h_1g_1 = h_2g_2$. Отсюда $g_1 = h_1^{-1}h_2g_2$. Тогда для любого $h \in H$: $hg_1 = hh_1^{-1}h_2g_2$, т.е. $Hg_1 \subset Hg_2$. Поскольку группа не знает, как мы пронумеровали ее элементы, точно так же можно показать, что $Hg_2 \subset Hg_1$. Отсюда следует, что классы совпадают $Hg_1 = Hg_2$. Любой элемент группы попадает в какой-нибудь класс, потому что в подгруппе есть единичный элемент. Значит мы разбили всю группу на равные по числу элементов множества.

Рассмотрим теперь только различные правые смежные классы, их количество называется *индексом подгруппы в группе* и обозначается $|G : H|$. Обозначение не случайно похоже на знак деления. Так как число классов целое, из тео-

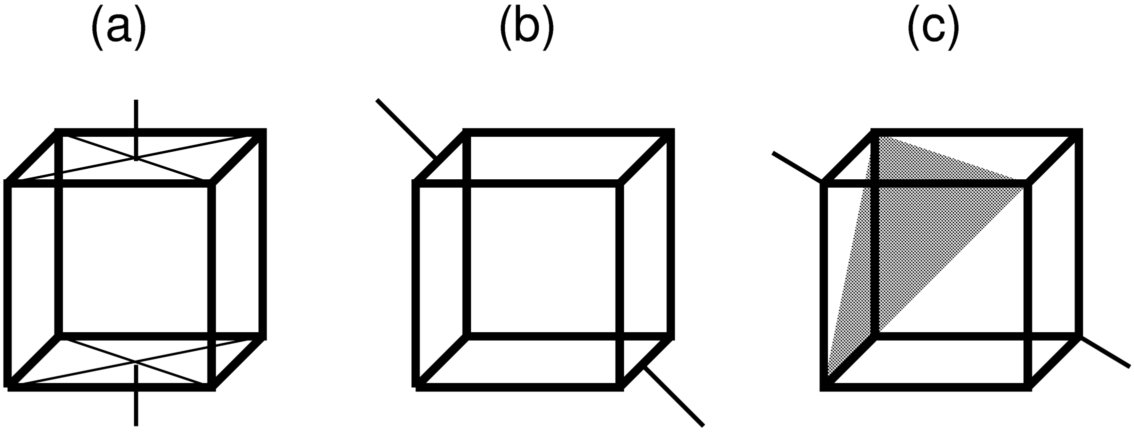

Рис. 2.1: Элементы симметрии группы куба: оси четвертого (a), второго (b) и третьего порядка (c).

ремы Лагранжа следует, что индекс подгруппы равен отношению порядков

$$|G : H| = \frac{|G|}{|H|}. \quad (2.1)$$

Другое важное следствие — утверждение, что порядок подгруппы делит порядок группы. Если, например, порядок группы G — простое число, то можно сразу сказать, что подгрупп в ней нет, кроме 1 и самой группы G, которые иногда называют тривиальными подгруппами. Как видно из следующего примера, теорема Лагранжа позволяет найти порядок группы.

Пример 2.1. Рассмотрим группу вращений куба O, рис. 2.1. Элементами симметрии будут оси. Оси четвертого и второго порядка (a),(b) проходят, соответственно, через середины противоположных граней и ребер. Ось третьего порядка можно увидеть, если соединить между собой три вершины, соседние с какой-нибудь одной вершиной A. Получится равносторонний треугольник, центр которого соединяет с вершиной A ось третьего порядка (c).

Имеется три преобразования, оставляющих данную вершину на месте: единичное преобразование 1 и повороты C_3, C_3^2 на 120° и 240° вокруг оси третьего порядка. Эти преобразования образуют подгруппу H. Группа куба разбивается на левые смежные классы gH. В каждом классе после одного из поворотов вокруг оси третьего порядка вершина A переводится в какую-нибудь другую вершину (либо остается на месте). Значит различных классов 8 по числу вершин, откуда $|\mathrm{O} : H| = 8$. Тогда из (2.1) получаем, что всего в группе $3 \cdot 8 = 24$ преобразования, $|\mathrm{O}| = 24$.

Инвариантная подгруппа. Фактор-группа. Прямое произведение

Определение 2.2. Подгруппа H группы G называется ***инвариантной***, если преобразования подобия не выводят из нее: $H = gHg^{-1}, \forall g \in G$, и обозначается $H \triangleleft G$.

Из определения видно, что $Hg = gH$, то есть для инвариантной подгруппы правые и левые смежные классы совпадают. Давайте рассматривать смежные классы как элементы нового множества. Определим произведение таких элементов: $Hg_1 \cdot Hg_2 \equiv H \cdot (g_1 g_2)$. Тогда снова получится группа F, потому что в ней очевидно есть ассоциативность, существует единичный элемент $H \cdot 1$ и для каждого Hg найдется обратный элемент $(Hg)^{-1} = H \cdot g^{-1}$. Порядок группы F равен индексу $|G : H|$, она называется ***фактор-группой*** и обозначается $F = G/H$.

Пример 2.2. В группе треугольника $\mathbf{D}_3$ имеется подгруппа $H = \mathbf{C}_3 = \{1, r, r^2\}$, состоящая из поворотов вокруг оси третьего порядка. Проверим, инвариантна ли H. Степени r, очевидно, не выводят из подгруппы: $r^k \cdot r^n \cdot r^{2k}$ снова степень r. Из чисто геометрических соображений тоже видно, что последовательность поворотов вокруг оси третьего порядка тоже поворот вокруг той же оси. Если степень r умножить на p справа и слева, снова получится степень r: $pr^n p = ppr^{2n} = r^{2n}$. Если представить себе, что треугольник лежит на столе, а его верхняя поверхность закрашена красной краской, то понятно, что если перевернуть треугольник красной стороной вниз, вращать на углы, кратные $120°$, а потом снова перевернуть красной стороной вверх, результат будет такой же, как после поворота вокруг C_3 на угол кратный $120°$.

Правые смежные классы можно найти по таблице умножения 1.1, разбитой на секторы. Три смежных класса совпадают с подгруппой: $H \cdot 1 = H \cdot r = H \cdot r^2 = H$, а три других: $H \cdot p = H \cdot pr = H \cdot pr^2$ совпадают между собой. Естественно обозначить $H = E$, потому что это единичный элемент фактор-группы. Другой ее элемент обозначим $P = Hp$, тогда $P^2 = Hp \cdot Hp = Hp^2 = H = E$. Получилась циклическая группа второго порядка $\mathbf{C}_2 = \mathbf{D}_3/\mathbf{C}_3$. Можно было бы и не проверять определяющее соотношение, потому что других групп порядка 2 нет. Фактор-группа, как и вообще фактор-множество в математике, означает, что мы огрубляем описание, рассматриваем группу “с точностью до” какой-нибудь инвариантной подгруппы. В данном примере нас не интересуют вращения r и получилась фактор-группа, состоящая из двух элементов: “красная поверхность сверху” и “красная поверхность снизу”.

Из геометрических соображений можно также увидеть, что подгруппа $\mathbf{C}_2 = \{1, p\} \in \mathbf{D}_3$ не является инвариантной. Обозначим красным цветом ту вершину, которую оставляют на месте преобразования подгруппы. Если повернуть треугольник вокруг оси третьего порядка, перевернуть, а потом повернуть вокруг оси третьего порядка назад, красная вершина не вернется в исходное состояние.

Определение 2.3. Прямым произведением групп $G = G \times F$ называется множе-

Таблица 2.1: Все конечные группы до порядка 12.

Порядок	Группы
1	$\mathbf{C}_1$
2	$\mathbf{C}_2$
3	$\mathbf{C}_3$
4	$\mathbf{C}_4$, $\mathbf{D}_2 \approx \mathbf{C}_2 \times \mathbf{C}_2$
5	$\mathbf{C}_5$
6	$\mathbf{C}_6 \approx \mathbf{C}_2 \times \mathbf{C}_3$, $\mathbf{D}_3$
7	$\mathbf{C}_7$
8	$\mathbf{C}_8, \mathbf{C}_2 \times \mathbf{C}_4$, $\mathbf{D}_4$, $\mathbf{C}_2 \times \mathbf{C}_2 \times \mathbf{C}_2$, $\mathbf{Q}$
9	$\mathbf{C}_9$, $\mathbf{C}_3 \times \mathbf{C}_3$
10	$\mathbf{C}_{10} \approx \mathbf{C}_2 \times \mathbf{C}_5$, $\mathbf{D}_5$
11	$\mathbf{C}_{11}$
12	$\mathbf{C}_{12} \approx \mathbf{C}_3 \times \mathbf{C}_4$, $\mathbf{C}_2 \times \mathbf{C}_6 \approx \mathbf{C}_2 \times \mathbf{C}_2 \times \mathbf{C}_3, \mathbf{D}_6 \approx \mathbf{C}_2 \times \mathbf{D}_3$, $\mathbf{A}_4, \mathbf{W}$

ство пар $g_i \times f_k, g_i \in G, f_k \in F$, операция между которыми определена формулой

$$(g_1 \times f_1) \cdot (g_2 \times f_2) \equiv (g_1 \cdot g_2) \times (f_1 \cdot f_2).$$

Из определения видно, что элементы каждой группы G и F перемножаются независимо, а знак “$\times$” играет роль разделителя. Порядок прямого произведения равен произведению порядков: $|G \times F| = |G| \cdot |F|$.

Несколько примеров групп одинакового порядка, но разной структуры приведены в таблице 2.1. Когда порядок группы равен 4 (а также 6 или 9), имеется две неизоморфные группы. Имеется пять неизоморфных групп порядка 8. Из таблицы также видно, что операции построения фактор-группы и прямого произведения нельзя считать взаимно-обратными. Если найти прямое произведение групп $\mathrm{C}_2 \times \mathrm{C}_3 = \mathrm{C}_6$, а не D_3.

В таблице приняты следующие обозначения: **Q** — группа кватернионов,[1] порождаемая двумя элементами P, Q с соотношениями

$$P^4 = 1, \quad P^2 = Q^2, \quad QPQ = P,$$

W — группа, порождаемая двумя элементами P, Q с соотношениями

$$P^4 = 1, \quad P^2 = Q^3, \quad QPQ = P.$$

Даже из малого фрагмента $n \leqslant 12$ видно, как резко растет число неизоморфных групп с величиной порядка, когда порядок — составное число. Полной классификации конечных групп пока не существует. Однако более частные задачи классификации решены. Для примера приведем без доказательств две классификационные теоремы: одну сравнительно простую и одну очень сложную.

[1]Группы **Q** и **W** не могут быть реализованы как группы симметрии геометрических тел.

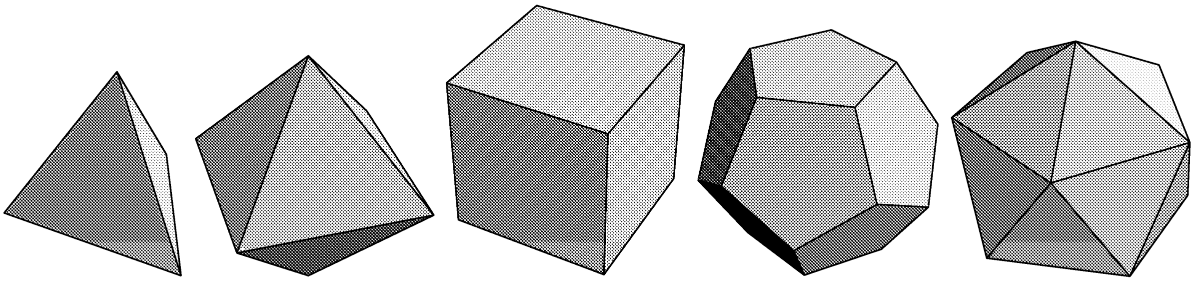

Рис. 2.2: Выпуклые правильные многогранники (платоновы тела): тетраэдр, октаэдр, куб (гексаэдр), додекаэдр и икосаэдр.

Пример 2.3. Конечные подгруппы собственных вращений трехмерного пространства исчерпываются списком:

$$\mathbf{C}_n, \mathbf{D}_n, \mathbf{T}, \mathbf{O}, \mathbf{Y}.$$

В списке имеется две серии $\mathbf{C}_n, \mathbf{D}_n$ с произвольным n. Остальные три группы — группы симметрии правильных многогранников: $\mathbf{T}$ — тетраэдра, $\mathbf{O}$ — октаэдра, $\mathbf{Y}$ — икосаэдра. Такие группы называются спорадическими, потому что они не входят ни в какие серии. Правильных многогранников всего 5, все они изображены на рис. 2.2. Если соединить центры граней куба получится октаэдр, поэтому куб и октаэдр называются дуальными многогранниками. Икосаэдр дуален додекаэдру, а тетраэдр дуален сам себе. Дуальные многогранники имеют одинаковую симметрию, поэтому в списке только 3 группы многогранников $\mathbf{T}, \mathbf{O}, \mathbf{Y}$. Элементарное доказательство можно найти, например, в [17].

Пример 2.4. Группа, которая не содержит инвариантной подгруппы, называется *простой*. Полный список простых конечных групп состоит из 17 серий и 26 спорадических групп. Задача классификации решена коллективными международными усилиями только в 1981 году. Введение в эту тему можно найти в книге [22], но и там нет доказательства теоремы, потому что оно занимает 5 тыс. страниц. Порядок самой большой спорадической простой группы — "чудовища" Фишера примерно равен 10^{54}.

Классы сопряженных элементов

Здесь мы введем еще одно разбиение группы на классы.

Определение 2.4. Элементы $a, b \in G$ называются *сопряженными*, если найдется $g \in G$, такой что

$$a = g \cdot b \cdot g^{-1}. \tag{2.2}$$

Отношение сопряженности обладает всеми тремя свойствами отношения эквивалентности:

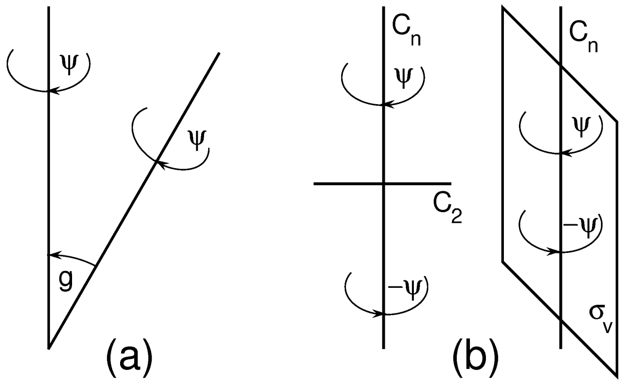

Рис. 2.3: Сопряженные элементы точечной группы: (a) повороты на один и тот же угол относительно разных осей; (b) повороты на угол ψ и $-\psi$ вокруг одной и той же оси.

1. $a \sim a$ рефлексивность;
2. $a \sim b, b \sim c \Rightarrow a \sim c$ транзитивность;
3. $a \sim b \Rightarrow b \sim a$ симметричность.

Значит отношение сопряженности разбивает всю группу на классы — *классы сопряженных элементов*. Классы сопряженных элементов, как и правые смежные классы, либо не пересекаются, либо совпадают.

Из определения видно, что регулярный способ поиска классов сопряженных элементов довольно сложен. Надо выбрать b и подставлять в формулу (2.2) все возможные g, пока не переберем всю группу. Однако для точечной группы имеется более простой способ, основанный на наглядных геометрических представлениях. Если посмотреть на формулу (2.2) внимательно, видно, что преобразования $a \sim b$ подобны, когда это одно и то же преобразование, выполненное в двух разных системах координат. Преобразование g^{-1} переводит b в новую систему, а g возвращает в старую. Значит повороты на один и тот же угол вокруг двух разных осей сопряжены, если в группе есть преобразование g, переводящее одну ось в другую, как показано на рис. 2.3 (a). Если речь идет о поворотах на одинаковые углы $\psi, -\psi$, но в разные стороны, то преобразований g может быть всего два: ось второго порядка C_2, перпендикулярная данной оси C_n, или зеркальная плоскость σ_v, проходящая через ось, рис. 2.3 (b). Ось C_n в этих двух случаях называется *двухсторонней*.

Пример 2.5. В группе D_3 разные степени r сопряжены между собой, поскольку $r = pr^2p, r^2 = prp$. Все элементы, содержащие p, взаимно сопряжены, потому что $pr = rpr^2, pr^2 = r^2pr$. Группа разбивается на три класса сопряженных элементов, как показано в таблице, где каждая строка соответствует одному классу.

1		
r	r^2	
p	pr	pr^2

Из геометрических соображений тоже видно, что повороты r, r^2 на $\pm 120^\circ$ сопряжены, потому что имеется ось второго порядка $C_2 \perp C_3$. Повороты p, pr, pr^2 на 180° вокруг трех медиан треугольника сопряжены, потому что в группе имеются преобразования r, r^2, переводящие одну медиану в другую.

2.2 Представления

В приложениях привычнее не пользоваться композициями преобразований, а перемножать матрицы. Чтобы это стало возможным, надо построить отображение элементов группы на матрицы, сохраняющее операцию.

Определение 2.5. Гомоморфизм h группы G в группу линейных преобразований линейного пространства $\mathbb{R}^n$ или $\mathbb{C}^n$ называется *матричным представлением* группы G.

Мы будем говорить просто *представление*, потому что не интересуемся другими (нематричными) реализациями группы. Число n называется *размерностью* представления. Будем обозначать представления $D(g)$, где D — матрица, отвечающая элементу группы g, а размерность обозначим $n = \dim D(g)$.

Представление называется *точным*, если h — изоморфизм. Можно все элементы группы отобразить в число **1**, рассматривая его как матрицу 1×1. Такое представление называется *единичным* и очевидно не является точным.

Примером точного представления конечной группы $G, |G| = n$ может служить *регулярное* представление размерности n, которое мы сейчас опишем. Сначала пронумеруем все элементы группы от 1 до n и представим себе единичную матрицу E размером $n \times n$. Каждая строка таблицы умножения группы, отвечающая элементу k осуществляет подстановку. Так, третья строка таблицы **1.1** отвечает подстановке

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

Теперь подействуем такой подстановкой на строки матрицы E, получится матрица

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Если эта матрица действует на любую матрицу, стоящую справа от нее, то она циклически переставляет первые три строки и последние три строки. Если выписать все 6 матриц, полученных таким способом, получится представление группы, которое называется регулярным.

Два представления $D^{(1)}(g), D^{(2)}(g)$ называются *эквивалентными*, если существует такая матрица V, не зависящая от g, что

$$D^{(1)}(g) = VD^{(2)}(g)V^{-1}.$$

Можно сказать, что эквивалентные представления — это одно и то же представление, записанное в разных базисах. Поэтому мы будем изучать представления с точностью до эквивалентности. Обозначаются эквивалентные представления знаком “$\sim$”.

По двум представлениям можно построить третье суммарной размерности

$$D(g) = D^{(1)}(g) \oplus D^{(2)}(g) = \begin{pmatrix} D^{(1)}(g) & 0 \\ 0 & D^{(2)}(g) \end{pmatrix},$$

которое называется *прямой суммой* представлений, $\dim D = \dim D^{(1)} + \dim D^{(2)}$.

Можно поставить и обратную задачу: существует ли такой базис, в котором все матрицы представления приводятся к блочно-диагональному виду:

$$D(g) \sim \begin{pmatrix} D^{(1)}(g) & 0 \\ 0 & D^{(2)}(g) \end{pmatrix}?$$

Если такой базис выбрать можно, представление называется *приводимым*. Если такого базиса не существует, представление называется *неприводимым* . Задача теории представлений — найти все неприводимые представления данной группы.

Приведем без доказательства 8 свойств представлений.

1. Всякое представление конечной группы эквивалентно унитарному (т.е. состоящему из унитарных матриц).

2. Число неэквивалентных неприводимых представлений равно числу классов сопряженных элементов.

3. Сумма квадратов размерностей неприводимых представлений равна порядку группы.

4. Представление фактор-группы является представлением самой группы.

5. Все неприводимые представления абелевой группы одномерны.

6. Матрица, перестановочная со всеми матрицами неприводимого представления, пропорциональна единичной.

7. Если матрица A связывает два неприводимых представления $D^{(1)}(g)A = AD^{(2)}(g)$, то A – нулевая матрица, либо $D^{(1)} \sim D^{(2)}$ и их размерности совпадают.

8. Соотношение ортогональности неприводимых представлений

$$\sum_{g\in G}\left[D^{(\alpha)}_{ij}(g)\right]^* D^{(\beta)}_{kl}(g) = \frac{|G|}{n_\alpha}\delta_{\alpha\beta}\delta_{ik}\delta_{jl}, \quad n_\alpha = \dim D^{(\alpha)}. \qquad \textbf{(2.3)}$$

Свойства 2,3 позволяют в простейших случаях найти размерности неприводимых представлений. Свойства 4,5 помогают строить представления. Свойства 6,7, известные как леммы Шура, нужны для доказательства свойства 8.

Пример 2.6. Размерности неприводимых представлений группы D_3 находятся с помощью второго и третьего свойств: $6 = 1^2+1^2+2^2$. Построим двумерное представление. В качестве образа единичного элемента возьмем единичную матрицу $\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)$. Элемент r отобразим в матрицу поворота на 120°:

$$r \to \begin{pmatrix}\cos 2\pi/3 & \sin 2\pi/3\\ -\sin 2\pi/3 & \cos 2\pi/3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

В качестве образа p выберем матрицу, меняющую координаты x, y местами

$$p \to \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}.$$

Остальные элементы легко представить, перемножая матрицы порождающих группу элементов. Получилось точное неприводимое двумерное унитарное представление.

Упражнение 2.1. Постройте все матрицы представления и проверьте соотношение ортогональности (A.3).