Лекция 3

Теория характеров

Чтобы классифицировать представления с точностью до эквивалентности, надо ввести инвариант преобразования подобия. Вводят след матрицы представления и называют его *характером*

$$\chi(g) = \operatorname{tr} D(g).$$

3.1 Свойства характеров

Теорема 3.1. *Характеры эквивалентных представлений $D^{(1)}(g) \sim D^{(2)}(g)$ совпадают.*

$$\chi(g) = \operatorname{tr} D^{(1)}(g) = \operatorname{tr} V D^{(2)}(g) V^{-1} = \operatorname{tr} V^{-1} V D^{(2)}(g) = \operatorname{tr} D^{(2)}(g),$$

поскольку матрицы под знаком следа можно циклически переставлять.

Теорема 3.2. *Характер есть функция класса сопряженных элементов.*

Пусть $a, b \in \sigma$ принадлежат одному классу сопряженных элементов. Тогда имеется $g \in G$: $a = gbg^{-1}$:

$$D(a) = D(gbg^{-1}) = D(g)D(b)D(g^{-1}) \Rightarrow \chi(a) = \operatorname{tr} D(g)D(b)D^{-1}(g) = \operatorname{tr} D(b) = \chi(b).$$

Теорема 3.3. *Характеры неприводимых представлений ортогональны.*

Свернем соотношение ортогональности представлений **(A.3)** по двум парам индексов, то есть умножим на $\delta_{ij}\delta_{kl}$ и просуммируем по повторяющимся индексам. В левой части получатся характеры, а в правой — останется $\delta_{ik}\delta_{ik} = \delta_{kk}$. Это след единичной матрицы, который равен размерности неприводимого представления $\dim D^{(\alpha)} = n_\alpha$:

$$\sum_{g \in G} \left[\chi^{(\alpha)}(g)\right]^* \chi^{(\beta)}(g) = |G|\delta_{\alpha\beta}. \tag{3.1}$$

Таблица 3.1: Неприводимые характеры группы D_3.

	$\sigma_1 = \{1\}$	$\sigma_2 = \{r, r^2\}$	$\sigma_3 = \{p, pr, pr^2\}$
$\chi^{(1)}$	1	1	1
$\chi^{(2)}$	1	1	-1
$\chi^{(3)}$	2	-1	0

Теорема 3.4. *Коэффициенты разложения представления в прямую сумму неприводимых*

$$D(g) = \bigoplus_{\alpha} k_\alpha D^{(\alpha)}(g) \tag{3.2}$$

находятся по формуле

$$k_\alpha = \left\langle \left[\chi^{(\alpha)}(g)\right]^* \chi(g) \right\rangle_G . \tag{3.3}$$

Здесь знак $\oplus$ означает прямую сумму, а k_α — целочисленные коэффициенты разложения, показывающие сколько раз неприводимое представление $D^{(\alpha)}(g)$ входит в исходное представление $D(g)$. Угловыми скобками обозначено *усреднение по группе*, т.е. суммирование по группе с последующим делением на ее порядок:

$$\langle \dots \rangle_G = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \dots .$$

Для вывода формулы (3.3) возьмем след от левой и правой частей (3.2). Получится разложение характера

$$\chi(g) = \sum_{\alpha} k_\alpha \chi^{(\alpha)}(g),$$

поскольку характер прямой сумме равен обычной сумме характеров. Умножим обе части на $[\chi^{(\beta)}(g)]^*$ и просуммируем по группе. Пользуясь ортогональностью (3.1), получим (3.3).

Пример 3.1. В группе D_3 имеется два одномерных неприводимых представления и одно двумерное, построенное в примере 2.6. Одно из одномерных представлений — единичное. Второе является представлением фактор-группы, найденной в примере 2.2, когда 1 сопоставляется всем степеням r, а -1 — элементам, содержащим p. Если найти характеры всех неприводимых представлений (для краткости говорят *неприводимые характеры*), получится таблица 3.1. По второму свойству достаточно вписать в таблицу след только одного представителя каждого класса сопряженных элементов.

В верхней части таблицы приведены классы сопряженных элементов. Каждая строка таблицы дает значения характера данного неприводимого представления на каждом классе. Самый первый элемент строки всегда равен размерности данного неприводимого представления. Столбцы таблицы ортогональны в обычном смысле, а строки ортогональны, если ввести скалярное произведение с

весами, равными порядкам классов. В данном примере веса случайно совпадают с номерами классов. Соотношение ортогональности (3.1) можно переписать с весами, если собрать одинаковые слагаемые и перейти к сумме по классам сопряженных элементов

$$\sum_a p_a \left[\chi^{(\alpha)}(\sigma_a)\right]^* \chi^{(\beta)}(\sigma_a) = |G|\delta_{\alpha\beta}, \quad p_a = |\sigma_a|. \tag{3.4}$$

3.2 Снятие вырождения при понижении симметрии

Мы уже упоминали про применение теории групп в молекулярной физике и кристаллографии. В классической механике теория групп также играет важную роль. Имеется теорема Нетер, которая по каждой непрерывной группе симметрии действия позволяет вычислить сохраняющуюся величину — интеграл движения. Например, если действие не зависит от времени, то сохраняется энергия. Но главными применениями теории групп в физике стали результаты, полученные в 20х гг. в квантовой механике и в 60х гг. XX века в теории элементарных частиц.

В квантовой механике говорят, что G — группа симметрии гамильтониана H, если все матрицы какого-нибудь ее представления $D(g)$ коммутируют с гамильтонианом:

$$D(g)H = HD(g).$$

Это означает, что если ψ — собственная функция оператора H с собственным значением E, т.е.

$$H\psi = E\psi,$$

то и $D(g)\psi, \forall g \in G$ — тоже собственная функция с тем же собственным значением E.

Чтобы построить представление $D(g)$, надо сначала определить действие элемента группы на функциях, например, координат $\psi_i(x), i = 1, 2, \ldots, n$. Зададим это действие правилом

$$g\psi_i(x) = \psi_i(g^{-1}x) = D_{ij}(g)\psi_j(x). \tag{3.5}$$

Последовательное действие двух преобразований a и b описывается тем же правилом:

$$a \cdot b\psi(x) = a\psi(b^{-1}x) \equiv a\phi(x),$$
$$a\phi(x) = \phi(a^{-1}x) = \psi\left(b^{-1}(a^{-1}x)\right) = \psi(b^{-1}a^{-1}x) = \psi\left((ab)^{-1}x\right).$$

Таким образом $D(a \cdot b) = D(a) \cdot D(b)$ и представление построено.

Если представление $D(g), n = \dim D$, неприводимо, то по лемме Шура матрица оператора Гамильтона диагональна. Более того, в подпространстве одного неприводимого представления на диагонали стоят одинаковые числа λ. Тогда

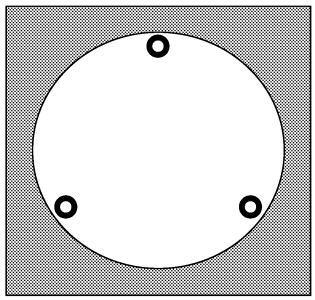

Рис. 3.1: Мембрана с закрепленным краем и тремя грузиками.

группе симметрии отвечает n-кратное вырождение. Пусть теперь к гамильтониану добавили возмущение V, имеющее меньшую симметрию F, $F < G$. Тогда, вообще говоря, размерность неприводимых представлений уменьшается и вырождение частично снимается. Отметим, что в рассуждениях мы нигде не пользовались малостью возмущения. Рассмотрим для наглядности пример не из квантовой механики, а из механики сплошных сред — малые колебания упругой мембраны.

Пример 3.2. Рассмотрим круглую мембрану радиуса a с закрепленным краем. Отклонение каждой точки $u(x, y, t)$ от положения равновесия описывается двумерным волновым уравнением. Для монохроматических колебаний с частотой ω в полярных координатах задача сводится к задаче на собственные значения

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = k^2 u, \quad k^2 = \frac{\omega^2}{c^2},$$

где c — скорость звука. Граничных условий — два: регулярность при $r = 0$ и обращение в нуль отклонения на краю $u(a, \varphi) = 0$. Мы знаем, что такая задача упрощается методом разделения переменных и имеет решение

$$u(r, \varphi) = R(r)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi}.$$

Радиальное уравнение на $R(r)$ решается в функциях Бесселя, но нас сейчас будет интересовать только зависимость от угла, которая при $m \neq 0$ имеет двукратное вырождение. Двум значениям $\pm m$ соответствует одно и то же собственное значение k.

Пусть теперь на мембрану поместили три одинаковых груза, расположенные в вершинах правильного треугольника, как показано на рис. 3.1. Уменьшится ли кратность вырождения?

Система грузов инвариантна относительно всех их перестановок, то есть относительно группы D_3. Сначала построим двумерное *исходное представление*, которое действует на паре собственных функций с одинаковыми k. Единичный элемент представляем единичной матрицей

$$D(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Чтобы найти представление r, подействуем этим преобразованием на пару наших функций согласно правилу (3.5) и найдем матрицу, которая действует точно так же:

$$r\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi} \\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}m(\varphi-2\pi/3)} \\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}m(\varphi-2\pi/3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-2\pi\mathrm{i}m/3} & 0 \\ 0 & e^{2\pi\mathrm{i}m/3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi} \\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\varphi} \end{pmatrix},$$

откуда

$$D(r) = \begin{pmatrix} e^{-2\pi\mathrm{i}m/3} & 0 \\ 0 & e^{2\pi\mathrm{i}m/3} \end{pmatrix}.$$

Матрица $D(p)$ меняет знак φ:

$$p\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi} \\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\varphi} \\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi} \end{pmatrix},$$

тогда

$$D(p) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Осталось вычислить след каждой матрицы и получить характер исходного представления

2	$2\cos(2\pi m/3)$	0

Теперь расположим его под таблицей 3.1 и, скалярно умножив на все строки с учетом весов, найдем коэффициенты разложения исходного представления на неприводимые. Размерности неприводимых представлений дадут ожидаемую степень вырождения:

$$D(g) = k_1 D^{(1)}(g) \oplus k_2 D^{(2)}(g) \oplus k_3 D^{(3)}(g),$$
$$k_1 = k_2 = \frac{1}{3}\left(1 + 2\cos\frac{2\pi m}{3}\right), \quad k_3 = \frac{1}{3}\left(2 - 2\cos\frac{2\pi m}{3}\right).$$

Заметим, что косинус в последних формулах равен 1, когда m кратно 3, или $-1/2$, когда m не делится на 3. Значит коэффициенты будут разными:

$$k_1 = k_2 = 1, \quad k_3 = 0, \quad m = 3n;$$
$$k_1 = k_2 = 0, \quad k_3 = 1, \quad m = 3n \pm 1.$$

Выводы: когда m делится на 3, вырождение снимается, и функции преобразуются по разным одномерным неприводимым представлениям. Когда m не делится на 3, функции преобразуются по двумерному неприводимому представлению, значит двукратное вырождение остается.

Физическую причину этого можно понять, если перейти к новым функциям угла φ:

$$\psi_+(\varphi) = \cos m\varphi, \quad \psi_-(\varphi) = \sin m\varphi.$$

Функция ψ_+ имеют нули в местах расположения грузов, когда m кратно 3. Значит на эту моду грузы не влияют, но они увеличивают частоту моды ψ_-, поэтому вырождение снимается именно при $m = 3n$.

Таблица 3.2: Таблицы неприводимых характеров точечных групп

$\mathbf{C}_2$	E	C_2
$\chi^{(1)}$	1	1
$\chi^{(2)}$	1	-1

$\mathbf{D}_2$	E	C_2	C_2'	C_2''
$\chi^{(1)}$	1	1	1	1
$\chi^{(2)}$	1	-1	1	-1
$\chi^{(3)}$	1	1	-1	-1
$\chi^{(4)}$	1	-1	-1	1

$\mathbf{D}_3$	E	$2C_3$	$3C_2$
$\chi^{(1)}$	1	1	1
$\chi^{(2)}$	1	1	-1
$\chi^{(3)}$	2	-1	0

$\mathbf{D}_4$	E	C_4^2	$2C_4$	$2C_2$	$2C_2'$
$\chi^{(1)}$	1	1	1	1	1
$\chi^{(2)}$	1	1	1	-1	-1
$\chi^{(3)}$	1	1	-1	1	-1
$\chi^{(4)}$	1	1	-1	-1	1
$\chi^{(5)}$	2	-2	0	0	0

$\mathbf{T}$	E	$3C_2$	$4C_3$	$4C_3^2$
$\chi^{(1)}$	1	1	1	1
$\chi^{(2)}$	1	1	ε	ε^2
$\chi^{(3)}$	1	1	ε^2	ε
$\chi^{(4)}$	3	-1	0	0

$\mathbf{O}$	E	$8C_3$	$3C_4^2$	$6C_2$	$6C_4$
$\chi^{(1)}$	1	1	1	1	1
$\chi^{(2)}$	1	1	1	-1	-1
$\chi^{(3)}$	2	-1	2	0	0
$\chi^{(4)}$	3	0	-1	-1	1
$\chi^{(5)}$	3	0	-1	1	-1

$\mathbf{Y}$	E	$15C_2$	$20C_3$	$12C_5$	$12C_5^2$
$\chi^{(1)}$	1	1	1	1	1
$\chi^{(2)}$	3	-1	0	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$
$\chi^{(3)}$	3	-1	0	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$
$\chi^{(4)}$	4	0	1	-1	-1
$\chi^{(5)}$	5	1	-1	0	0

Для справки мы приведем таблицы характеров нескольких точечных групп: $\mathbf{C}_2, \mathbf{D}_2, \mathbf{D}_3, \mathbf{D}_4, \mathbf{T}, \mathbf{O}, \mathbf{Y}$.

Обозначения: В первой строке каждой таблицы перечислены классы сопряженных элементов σ_i. Единичный элемент обозначен буквой E, C_n означает ось n-го порядка. Числа перед символами элементов симметрии указывают число элементов в соответствующих классах, $\varepsilon = \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}/3}$. Когда группа представляет собой прямое произведение $G = G_1 \times G_2$, ее таблица характеров — прямое произведение таблиц характеров G_1 и G_2 (см., например, таблицы для $\mathbf{C_2}$ и $\mathbf{D_2} = \mathbf{C_2} \times \mathbf{C_2}$). Более подробные таблицы, охватывающие почти все точечные группы, приведены, например, в учебниках Ландау и Лифшица [3], Петрашень и Трифонова [4].