Лекция 5

Группы и алгебры Ли

5.1 Гладкое многообразие

Определение 5.1. *Многообразие* $M \subset \mathbb{R}^n$ — это множество, каждая точка которого имеет открытую окрестность, допускающую взаимно-однозначное и взаимнонепрерывное отображение в открытое подмножество $\mathbb{R}^n$.

На рис. 5.1 показана точка $a \in M$ и две ее окрестности U, V, которые отображаются в $\mathbb{R}^n$ функциями f, g, соответственно. В образах окрестностей $f(U), g(V)$ серым показан образ пересечения окрестностей. Точка a отображается в точки $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n), y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$. Если мы захотим перейти от точки x к точке y, можно построить композицию отображений $g \cdot f^{-1}$. Если функция $y = g\left(f^{-1}(x)\right)$ является гладкой, то M называют *гладким* многообразием.

Другими словами, в окрестности каждой точки многообразия можно локально ввести декартовы координаты (*карту*). Если переход с карты на карту осуществляется гладкой функцией, то и многообразие гладкое. Если любые две точки многообразия M можно соединить кривой, целиком лежащей в многообра-

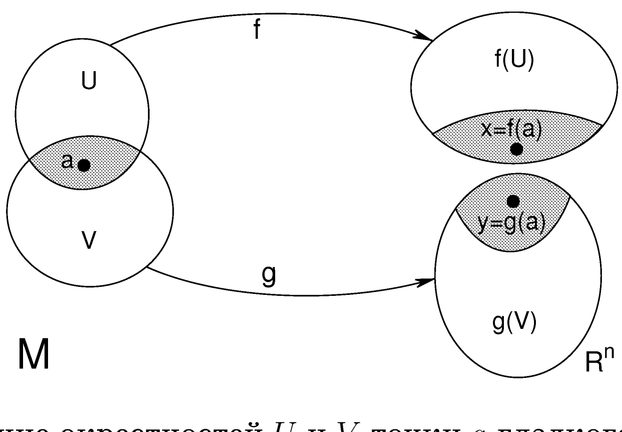

Рис. 5.1: Отображение окрестностей U и V точки a гладкого многообразия M в евклидово пространство $\mathbb{R}^n$. Функция $y = g\left(f^{-1}(x)\right)$ должна быть гладкой.

зии, M называется *связным*. Если всякий замкнутый путь на многообразии M можно непрерывно стянуть в точку, M — *односвязное* многообразие. Замкнутое ограниченное многообразие будем называть *компактным*.

Более подробно топологические и геометрические вопросы, связанные с гладкими многообразиями, изложены в книгах [17,23]. Последовательное, но вполне элементарное введение в топологию с многочисленными иллюстрациями имеется в книге [24]. Для наших целей надо представлять себе, что характерным признаком многообразия служит равноправие всех точек.

Пример 5.1. На прямой $\mathbb{R}$ отрезок (сегмент) $a \leqslant x \leqslant b$ не является многообразием, поскольку концевые точки a, b неравноправны с внутренними точками. Интервал $a < x < b$ — многообразие, вся числовая ось $\mathbb{R}$ тоже многообразие. Интервал можно, растягивая, непрерывно отобразить на всю числовую ось, поэтому говорят, что интервал и ось *гомеоморфны*. Окружность $S^1 : x^2+y^2 = 1$ тоже одномерное многообразие на плоскости, но в отличие от предыдущего, компактное. Чтобы отобразить его на интервал, нужно разорвать окружность, удалив одну точку, либо склеить концы интервала, добавив одну точку. Отображение с разрывами или склейками не непрерывное, поэтому S^1 и $\mathbb{R}$ не гомеоморфны.

В качестве двумерных примеров рассмотрим сферу $S^2 : x^2 + y^2 + z^2 = 1$ и тор T^2. Сфера представляет собой односвязное многообразие. На торе имеются контуры, которые нельзя гладко стянуть в точку, поэтому многообразие неодносвязное. Оба примера — связные компактные многообразия, а их объединение $S^2 \cup T^2$ — тоже многообразие, но несвязное.

5.2 Группа Ли

Определение 5.2. *Группа Ли G* — это непрерывная группа, которая одновременно является гладким многообразием. Предполагается также, что групповая операция и нахождение обратного элемента задаются гладкими отображениями $G \times G \to G$ и $G \to G$.

Чтобы проверить, является ли данная группа группой Ли, вводят локальные координаты $x = (x_1, x_2, \ldots, x_r)$. Процедура введения координат называется *параметризацией* группы, а минимально необходимое число действительных параметров r — *размерностью* группы $r = \dim G$. Начало координат принято выбирать в единице группы. Вместо таблицы умножения непрерывная группа задается функцией $2r$ переменных. Пусть при перемножении элементов с координатами x, y получился элемент с координатой z: $g(z) = g(x) \cdot g(y)$. Тогда $z = \varphi(x, y)$ называется *функцией умножения*. Если при проверке оказалось, что функция $\varphi(x, y)$ — гладкая, то G — группа Ли.

Групповое свойство накладывает три ограничения на функцию умножения:

1. $\varphi(\varphi(x, y), z) = \varphi(x, \varphi(y, z))$;

2. $\varphi(x, 0) = \varphi(0, x) = x$;

3. $\forall x \exists y : \varphi(x, y) = \varphi(y, x) = 0$.

В приложениях нас будут интересовать *матричные группы Ли* $G < \mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$ или $G < \mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$, т.е. подгруппы группы всех невырожденных преобразований n-мерного линейного пространства над полем действительных или комплексных чисел.

Размерность полной группы линейных преобразований $\dim \mathbf{GL}(n, \mathbb{C}) = 2n^2$. Ее подгруппы задаются набором некоторого числа k уравнений связи, поэтому имеют меньшую размерность $r = 2n^2 - k$. В пространстве $\mathbb{R}^{2n^2}$ k уравнений задают r-мерное многообразие. Если условия задаются равенством нулю вещественно-аналитических функций координат, то многообразие получается гладким. В матричной группе $\mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$ можно ввести координаты. Вычтем из матриц A, B единичную матрицу E и обозначим $A - E = X, B - E = Y$, а элементы матриц X, Y будем считать координатами матриц A, B. Найдем координаты произведения и тем самым функцию умножения (которая тоже представляет собой квадратную матрицу)

$$\varphi(X, Y) = (E + X)(E + Y) - E = X + Y + XY.$$

Легко убедиться, что все три свойства выполнены. Проверим, например, первое:

$$\begin{aligned} \varphi(\varphi(X, Y), Z) &= \varphi(X, Y) + Z + \varphi(X, Y)Z &&= (X + Y + XY) + Z + (X + Y + XY)Z, \\ \varphi(X, \varphi(Y, Z)) &= X + \varphi(Y, Z) + X\varphi(Y, Z) &&= X + (Y + Z + YZ) + X(Y + Z + YZ). \end{aligned}$$

Пример 5.2. Размерность группы всех линейных преобразований над полем комплексных чисел $\dim \mathbf{GL}(n, \mathbb{C}) = 2n^2$, потому что всего в матрице n^2 комплексных чисел. Символ $\mathbf{SL}(n, \mathbb{C})$, где буква S означает “специальную” группу, состоящую из унимодулярных матриц (матриц с равным единице определителем). Равенство единице определителя — это одно дополнительное комплексное условие или два действительных, поэтому $\dim \mathbf{SL}(n, \mathbb{C}) = 2n^2 - 2$.

$\mathbf{U}(n, \mathbb{C})$ означает группу унитарных матриц, т.е. таких, для которых эрмитовски сопряженная совпадает с обратной $U^{-1} = U^{\dagger}$. Чтобы найти размерность, пересчитаем дополнительные условия: первая строка должна быть ортогональна $(n - 1)$ строке, вторая — $(n - 2)$ строкам,..., предпоследняя — одной, последней. Всего получается $n(n - 1)/2$ комплексных условий или $n(n - 1)$ действительных. Имеется также n действительных условий нормировки на единицу каждой строки. Вычитая из $2n^2$ количество условий, найдем $\dim \mathbf{U}(n, \mathbb{C}) = n^2$. В обозначении унитарной группы для краткости иногда не пишут знака поля комплексных чисел, а подразумевают.

$\mathbf{SO}(n, \mathbb{R})$ — группа ортогональных унимодулярных матриц: $g^{-1} = g^T, \det g = 1$. Из размерности $\dim \mathbf{GL}(n, \mathbb{R}) = n^2$ надо вычесть $n(n-1)/2$ (соотношений ортогональности строк или столбцов) и n условий нормировки. Получится $\dim \mathbf{SO}(n, \mathbb{R}) = n^2 - n(n - 1)/2 - n = n(n - 1)/2$. В обозначении группы ортогональных матриц тоже иногда пропускают для краткости знак поля действительных чисел.

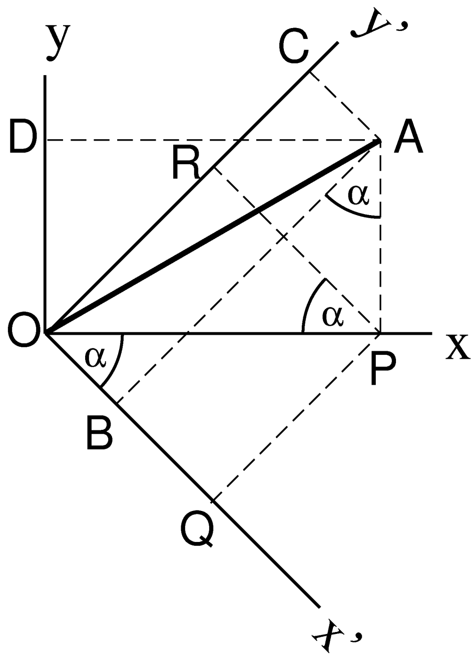

Рис. 5.2: К выводу матрицы вращения вокруг оси z на угол α.

Группы $\mathbf{SO(p, n-p, \mathbb{R})}$ — это группа преобразований сохраняющих норму $\rho^2 = x_1^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \cdots - x_n^2$. В частных случаях $p = 0$ или n такая группа изоморфна $\mathbf{SO(n, \mathbb{R})}$. При других p и фиксированном n группы отличаются, но размерность остается той же самой.

Параметризация группы Ли может быть разной, но число координат остается равным размерности группы.

Пример 5.3. Поворот $g \in \mathbf{SO(3)}$ можно рассматривать как последовательность поворотов на угол α_1 вокруг оси x, на угол α_2 вокруг оси y и на угол α_3 вокруг оси z. Тогда матрица поворота дается произведением трех ортогональных матриц

$$g(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \begin{pmatrix} \cos\alpha_3 & -\sin\alpha_3 & 0 \\ \sin\alpha_3 & \cos\alpha_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha_2 & 0 & \sin\alpha_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\alpha_2 & 0 & \cos\alpha_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha_1 & -\sin\alpha_1 \\ 0 & \sin\alpha_1 & \cos\alpha_1 \end{pmatrix} \quad (5.1)$$

Замечание 5.1. Обратите внимание, что знак синуса во второй матрице (5.1) не такой, как в первой и последней. Чтобы разобраться в знаках, обратимся к рисунку 5.2. Вместо того, чтобы повернуть вектор OA в положительном направлении на угол α, мы поворачиваем на тот же угол координатные оси, но в отрицательном направлении. Опустим из точки A перпендикуляры AP и AD на старые координатные оси, тогда OP$= x$, OD$= y$. Опустим перпендикуляры AC и AB на новые оси, тогда OB$= x'$, OC$= y'$. Опустим также перпендикуляры PQ и PR на новые оси из точки P. Теперь заметим, что углы QOP, OPR и BAP равны α. Отсю-

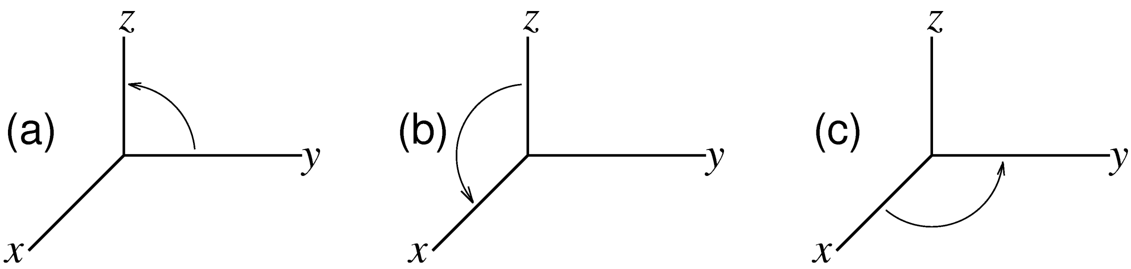

Рис. 5.3: Схема вращения вокруг координатных осей.

да x' =OB=OQ-BQ=OP$\cos\alpha-$AP$\sin\alpha = x\cos\alpha - y\sin\alpha$. Аналогично, y' =OC=OR-RC=OP$\sin\alpha+$AP$\cos\alpha = x\sin\alpha + y\cos\alpha$. Значит в матрице вращения вокруг оси z знак минус стоит перед синусом в первой строке, потому что вращение идет от оси x к оси y, как показано схематически на рисунке 5.3 c. Аналогично знаки расставлены и при вращении вокруг оси x, см. рис. 5.3 a. Только при вращении вокруг оси y (рис. 5.3 b) поворот идет от оси z к оси x, поэтому знаки получаются другими.

Другая параметризация получается, если ввести углы Эйлера. Вращение рассматривается как поворот на угол φ вокруг оси z, затем на угол θ вокруг нового положения оси x (линии узлов), а затем вокруг новой оси z на угол ψ:

$$g(\varphi,\theta,\psi) = \begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Можно поворот рассматривать как вращение на угол ψ вокруг единичного вектора $\mathbf{n}$, координаты которого на единичной сфере даются углами θ,φ в сферической системе координат. Получилась третья параметризация. Увеличим радиус единичного шара до значения π, тогда можно отсчитывать координату ψ вдоль радиуса и каждая точка внутри шара на рис. 5.4 соответствует элементу группы. Повороты на угол $\pi \leqslant \psi \leqslant 2\pi$ можно рассматривать как повороты на угол $0 \leqslant \psi \leqslant \pi$ вокруг вектора $-\mathbf{n}$. Однако поворот ровно на угол π вокруг осей $\mathbf{n}$ и $-\mathbf{n}$ — это одно и то же преобразование, поэтому мы должны отождествить все пары диаметрально противоположных точек сферы (говорят, что сфера «кусает сама себя»). Получившееся множество и есть многообразие $\mathrm{SO}(3)$, потому что отождествив противоположные точки сферы, мы убрали границу и сделали все точки равноправными. Многообразие получилось связным, но неодносвязным, потому что мы не можем стянуть в точку путь, проходящий через концы диаметра шара. Диаметрально противоположные точки останутся противоположными и нам не удастся свести их в одну. То, что нам не удалось нарисовать данное многообразие без самопересечений, означает, что оно не вкладывается в трехмерное пространство. $\mathrm{SO}(3)$ вкладывается в четырехмерное евклидово про-

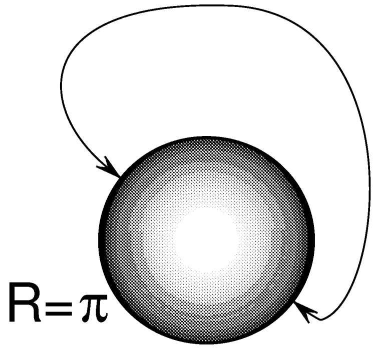

Рис. 5.4: Многообразие SO(3) представляет собой шар радиуса π, диаметрально противоположные точки которого отождествлены.

странство. Такое многообразие называется проективной сферой и обозначается $\mathbb{R}P^3$. Многообразия четырех групп Ли сведены в таблице 5.1.

5.3 Алгебра Ли

Определение 5.3. *Алгеброй Ли* над полем $F = \mathbb{R}$ или $F = \mathbb{C}$ называется линейное пространство над F, снабженное бинарной операцией (*скобкой Ли* $[\cdot,\cdot]$) со следующими свойствами:

1. $[\lambda a + b, c] = \lambda[a, c] + [b, c]$ линейность;
2. $[b, a] = -[a, b]$ антисимметричность;
3. $[a, [b, c]] + [c, [a, b]] + [b, [c, a]] = 0$ тождество Якоби.

Приведем три примера:

1. Пространство $\mathbb{R}^3$ с векторным произведением (обозначим его $\mathbb{R}^3_\times$). Первое и второе свойство очевидны, третье доказывается с помощью правила «БАЦ минус ЦАБ».

2. Алгебра матриц с коммутатором $[A, B] = AB - BA$. Третье свойство проверяется непосредственно

$$\begin{aligned}
[A_1, [A_2, A_3]] &= A_1(\underline{A_2A_3} - A_3A_2) - (A_2A_3 - A_3A_2)A_1,\\
[A_3, [A_1, A_2]] &= A_3(A_1A_2 - A_2A_1) - (\underline{A_1A_2} - A_2A_1)A_3,\\
[A_2, [A_3, A_1]] &= A_2(A_3A_1 - A_1A_3) - (A_3A_1 - A_1A_3)A_2.
\end{aligned}$$

В сумме получится нуль, потому что все слагаемые скомпенсируются. Одна из таких пар подчеркнута.

3. Функции координат q_i и импульсов p_i со скобкой Пуассона

$$\{f, g\} = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i} - \frac{\partial g}{\partial p_i}\frac{\partial f}{\partial q_i}\right).$$

Таблица 5.1: Многообразия нескольких групп Ли

Группа	Многообразие	Уравнение	Обозн.
$\mathbf{SO(2)}$	Окружность	$x_1^2 + x_2^2 = 1$	S^1
$\mathbf{U(1) \times U(1)}$	Тор	$z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_1 + \mathrm{i}\phi_2}$	T^2
$\mathbf{SU(2)}$	Сфера	$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$	S^3
$\mathbf{SO(3) \approx SU(2)/C_2}$	Проективная сфера	$x_0^2+x_1^2+x_2^2+x_3^2 = 1, \quad x_0 \geq 0$, диаметрально противоположные точки "экватора"$x_1^2+x_2^2+x_3^2 = 1$ отождествлены	$\mathbb{R}P^3$

образуют бесконечномерную алгебру Ли. Тождество Якоби доказывается в механике [25].

5.4 Алгебра Ли группы Ли

Среди абстрактных алгебр Ли наиболее ценна та алгебра, которая связана с данной группой Ли. Покажем, как она получается. Строим касательное пространство в единице матричной группы G, как показано на рис. 5.5. В качестве базисных касательных векторов выберем частные производные по отдельным координатам

$$I_k = \left.\frac{\partial g(x_1, x_2, \ldots, x_r)}{\partial x_k}\right|_{x=0}, \; k = 1, 2, \ldots, r, \tag{5.2}$$

а скобкой Ли будет коммутатор. Такие векторы называются *генераторами* группы. Скобка Ли находится как разность функций умножения в прямом и обратном порядке

$$[X, Y] = \lim_{X,Y \to 0} (\varphi(X, Y) - \varphi(Y, X)) = XY - YX.$$

Коммутатор базисных векторов можно снова разложить по базису

$$[I_i, I_j] = \sum_k c_{ij}^k I_k, \tag{5.3}$$

тогда коэффициенты c_{ij}^k разложения называются *структурными константами* алгебры Ли. Из (5.2) видно, что структурные константы антисимметричны

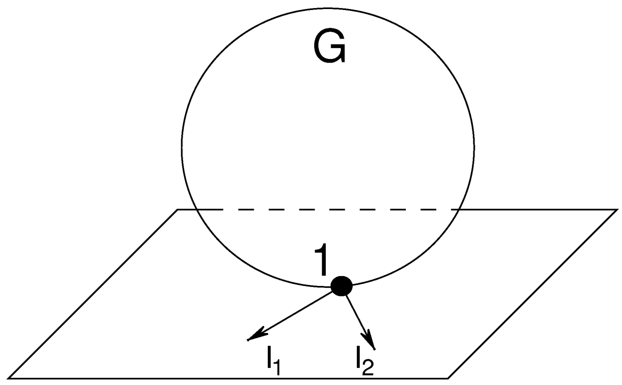

Рис. 5.5: Группа Ли G и касательное пространство в единице. Показано два базисных вектора I_1, I_2, лежащих в касательном пространстве.

по нижним индексам $c_{ji}^k = -c_{ij}^k$. В частности, в алгебре $\mathbb{R}^3_\times$ структурные константы выражаются через полностью антисимметричный тензор e_{ijk}: $c_{ij}^k = e_{ijk}$. Здесь e_{ijk} — полностью антисимметричный тензор, $e_{123} = +1$.

Чтобы проверить (5.3) возьмем элемент группы g, лежащий в окрестности единицы, и разложим по базису: $g = 1 + t\sum c_k I_k$, где параметр $t \to 0,$ а более высокими степенями t мы пренебрегаем. Совершим преобразование подобия с одним из генераторов

$$\tilde{I}_l = gI_lg^{-1} = (1 + t\sum_k c_k I_k)I_l(1 - t\sum_k c_k I_k)$$

и его результат снова разложим по базису, пренебрегая квадратичными членами (чтобы оставаться в окрестности единицы)

$$\tilde{I}_l = I_l + t\sum_k c_k(I_k I_l - I_l I_k).$$

В частности, если сдвинуться на $t \to 0$ вдоль генератора I_m: $g = g_m = 1 + tI_m$, то в сумме по k останется только коэффициент с $k = m$, равный единице:

$$\tilde{I}_l^{(m)} = I_l + t[I_m, I_l]. \tag{5.4}$$

С другой стороны, в окрестности единицы мы можем разложить $\tilde{I}_l$ по базисным векторам

$$\tilde{I}_l^{(m)} = I_l + t\sum_n d_{ln}^{(m)} I_n, \tag{5.5}$$

причем коэффициенты разложения d будут зависеть также от m. Приравнивая (5.4) и (5.5), получим (5.3). Отсюда видно, что коммутатор генераторов можно снова линейно выразить через генераторы. Структурные константы определяться коэффициентами d разложения по базису. Будем обозначать алгебру Ли группы Ли, как группу, добавляя впереди букву А. Иногда алгебру обозначают теми же, что и группу, но строчными буквами.

5.5 Восстановление группы Ли по ее алгебре. Экспоненциальная формула

Восстановление группы Ли по алгебре Ли основано на простом соображении: любой элемент группы можно приближенно записать как произведение большого числа элементов, близких к единице. В пределе получается бесконечное произведение, которое подчиняется обыкновенному дифференциальному уравнению. Решение дифференциального уравнения можно продолжить, но максимальная область распространения решения может и не совпасть со всей группой.

Сначала научимся восстанавливать элементы однопараметрической подгруппы группы $g(t) \in H < G, g(0) = 1$. Параметр t можно считать координатой и, продифференцировав по нему, найти алгебру. В такой алгебре всего один генератор

$$I = \left.\frac{dg}{dt}\right|_{t=0}.$$

Оказывается, что групповое свойство подгруппы можно записать как

$$g(s+t) = g(t)g(s). \qquad \textbf{(5.6)}$$

Продифференцируем **(5.6)** по параметру t, а затем устремим $t \to 0$:

$$g'(s) = Ig(s).$$

Решение такой системы обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и начальным условием $g(0) = 1$, как известно, дается экспоненциальной формулой

$$g(s) = \exp Is.$$

В общем случае восстановление группы по ее алгебре невозможно, потому что не каждый элемент группы лежит в однопараметрической подгруппе.

Пример 5.4. В группе $\mathrm{GL}(\mathbf{n}, \mathbb{R})$ имеются матрицы с отрицательным определителем. Если мы соединим такую матрицу $g, \det g < 0$ с единичной $E, \det E > 0$ непрерывной кривой, то кривая неизбежно пересечет гиперповерхность $\det g = 0$ (рис. 5.6). Но вырожденные матрицы не принадлежат нашей группе. Значит матрицы с отрицательным определителем лежат в группе, но не принадлежат никакой однопараметрической подгруппе.

Сформулируем достаточное условие однозначного восстановления группы по ее алгебре. Доказывать условие мы не будем, а в следующей лекции приведем примеры, когда оно нарушается.

Теорема 5.1. *Всякой алгебре Ли отвечает единственная связная односвязная группа Ли.*

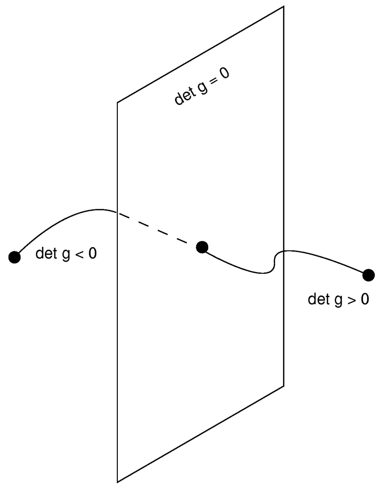

Рис. 5.6: Если соединить непрерывной кривой матрицы с положительным и отрицательным определителем, кривая пересечет поверхность вырожденных матриц.