



матрица описывает координаты, которые не преобразуются. Матрица с  $-1$  на главной диагонали описывает координаты, которые меняют знак (отражения). Блоки  $2 \times 2$  описывают повороты на угол  $\theta_i$  в плоскостях.

Перейдем к подгруппе унимодулярных матриц  $SO(n, \mathbb{R}) < O(n, \mathbb{R})$ . Чтобы определитель был равен  $+1$ ,  $m_-$  должно быть четным числом. Тогда второй блок можно представить как совокупность минус единичных матриц  $2 \times 2$ , а каждую матрицу  $-E_2$  записать как поворот на угол  $\pi$ :

$$-E_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \pi & \sin \pi \\ -\sin \pi & \cos \pi \end{pmatrix}. \quad (6.3)$$

В четномерном пространстве инверсия сводится к поворотам на угол  $\pi$ . Мы только отбросили матрицы с определителем  $-1$  (несобственные вращения), поэтому размерность группы останется такой же, как была в предыдущем примере. Группа Ли  $O(n, \mathbb{R})$  не является связной, а условие унимодулярности просто выделяет одну связную компоненту из двух.

Алгебра  $\mathfrak{AO}(n, \mathbb{R})$  останется той же, что и  $\mathfrak{AO}(n, \mathbb{R})$ . Для каждого вращения в плоскости генератор будет содержать нули всюду, кроме блока  $i = 1, \dots, l$ :

$$X_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = i\sigma_2.$$

Мы выразили ненулевой блок генератора через *матрицу Паули*. Такое представление удобно, потому что эти матрицы:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (6.4)$$

обладают простыми свойствами:

$$\sigma_i \sigma_j = ie_{ijk} \sigma_k + \delta_{ij}.$$

По экспоненциальной формуле (6.1) мы восстановим только собственные вращения, а матрицы с нечетным числом отражений восстановить не сможем, потому что они не принадлежат никакой однопараметрической подгруппе.

**Пример 6.3.** Группу  $SO(3)$  можно параметризовать как поворот на угол  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$  вокруг координатных осей (5.1). Дифференцируя по  $\alpha_1$ , согласно определению (5.2), восстановим первый генератор

$$I_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad I_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (6.5)$$

Знак минус у генератора  $I_2$  получился в нижней строке в соответствии с замечанием 5.1. Прямым вычислением находим коммутаторы генераторов

$$I_1 I_2 - I_2 I_1 = I_3, \quad I_2 I_3 - I_3 I_2 = I_1, \quad I_3 I_1 - I_1 I_3 = I_2,$$

Таблица 6.1: Примеры матричных групп Ли.

$G$	Группа Ли	Алгебра Ли	$\dim G$
$GL(n, \mathbb{C})$	Невырожденные матрицы	Все матрицы	$2n^2$
$SL(n, \mathbb{C})$	Унимодулярные матрицы	Бесследовые матрицы	$2n^2 - 2$
$U(n, \mathbb{C})$	Унитарные матрицы	Антиэрмитовы матрицы	$n^2$
$SU(n, \mathbb{C})$	Унитарные унимодулярные матрицы	Антиэрмитовы бесследовые матрицы	$n^2 - 1$
$O(n, \mathbb{R})$	Ортогональные матрицы	Антисимметричные матрицы	$\frac{n(n-1)}{2}$
$SO(n, \mathbb{R})$	Ортогональные унимодулярные матрицы	Антисимметричные матрицы	$\frac{n(n-1)}{2}$

а значит найдены и структурные константы алгебры Ли:

$$[I_i, I_j] = e_{ijk} I_k.$$

Кстати, мы доказали, что алгебры вращений и трехмерного пространства с векторным произведением изоморфны:

$$ASO(3) \approx \mathbb{R}_\times^3.$$

По алгебре восстанавливается элемент группы

$$g(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \exp(I_1\alpha_1 + I_2\alpha_2 + I_3\alpha_3) = \exp(\mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\alpha}).$$

Пример 6.4. Группа  $U(n, \mathbb{C})$  — это унитарные комплексные матрицы  $U^{-1} = U^\dagger$ . Алгебра  $AU(n, \mathbb{C})$  состоит из антиэрмитовых матриц  $X^\dagger = -X$ . Покажем это, вычислив экспоненту

$$(\exp Xt)^\dagger = \exp X^\dagger t = \exp(-Xt) = (\exp Xt)^{-1}.$$

На диагонали антиэрмитовой матрицы стоят чисто мнимые числа, а над диагональю — комплексные, значит размерность алгебры равна  $n + 2n(n-1)/2 = n^2$ . Группа связная, поэтому восстанавливается по алгебре. Если мы захотим перейти к группе унимодулярных матриц  $SU(n, \mathbb{C})$ , то размерность уменьшится на единицу. Канонический вид унитарной матрицы

$$U = \begin{pmatrix} e^{i\phi_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{i\phi_n} \end{pmatrix},$$

где фазы  $\phi_i$  — действительны. Поэтому для равенства единице определителя придется добавить одно условие

$$\sum_i \phi_i = 2\pi N, \quad N = 0, 1, 2, \dots$$

Алгебра  $ASU(n, \mathbb{C})$  состоит из антиэрмитовых бесследовых матриц, как следует из формулы

$$\det \exp A = \exp \operatorname{tr} A. \quad (6.6)$$

Поэтому размерность алгебры также  $n^2 - 1$ .

Для диагональной матрицы  $A$  формула очевидно выполняется. Если матрица  $A$  приводится к диагональному виду  $\Lambda$ , то есть  $A = T\Lambda T^{-1}$ , то в каждом слагаемом ряда Тейлора внутренние  $T$  и  $T^{-1}$  сокращаются, а внешние выносятся

$$\begin{aligned} \det \exp T\Lambda T^{-1} &= \det \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \prod_{j=1}^n T\Lambda T^{-1} = \det \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} T\Lambda^n T^{-1} \\ &= \det [T (\exp \Lambda) T^{-1}] = \det \exp \Lambda = \exp \operatorname{tr} \Lambda. \end{aligned}$$

В общем случае, когда матрица  $A$  сводится к прямой сумме жордановых клеток, доказательство формулы (6.6) приведено в сборнике задач [2].

**Пример 6.5.** Группа  $SU(2)$ ,  $\dim SU(2) = 3$ , параметризуется двумя комплексными числами  $a, b$  с одним дополнительным условием

$$U = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix}, \quad |a|^2 + |b|^2 = 1.$$

Перейдем к действительным параметрам  $a = x_0 + ix_1, b = x_2 + ix_3$ , тогда

$$U = \begin{pmatrix} x_0 + ix_1 & x_2 + ix_3 \\ -x_2 + ix_3 & x_0 - ix_1 \end{pmatrix}.$$

Найдем генераторы, дифференцируя по трем независимым координатам  $x_1, x_2, x_3$

$$\begin{aligned} L_1 &= \left. \frac{\partial U}{\partial x_1} \right|_{x_1=x_2=x_3=0} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = i\sigma_3, \\ L_2 &= \left. \frac{\partial U}{\partial x_2} \right|_{x_1=x_2=x_3=0} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = i\sigma_2, \\ L_3 &= \left. \frac{\partial U}{\partial x_3} \right|_{x_1=x_2=x_3=0} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} = i\sigma_1. \end{aligned}$$

Мы выразили генераторы через матрицы Паули (6.4)  $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ . Из выражений видно, что нам следует поменять местами первый и третий генераторы ( $\tilde{L}_1 = L_3, \tilde{L}_2 = L_2, \tilde{L}_3 = L_1$ ), тогда коммутационные соотношения станут стандартными

$$[\tilde{L}_i, \tilde{L}_j] = -[\sigma_i, \sigma_j] = -2ie_{ijk}\sigma_k = -2e_{ijk}\tilde{L}_k.$$

Отсюда видны два следствия. Во-первых, можно разделить все генераторы  $\tilde{L}_i$  на -2:

$$I_i = -\frac{\tilde{L}_i}{2} = -\frac{i}{2}\sigma_i, \quad (6.7)$$

тогда получатся в точности те же соотношения, что и в примере 6.3 с алгеброй  $ASO(3)$ :  $[I_i, I_j] = \epsilon_{ijk}I_k$ . Таким образом, мы доказали изоморфизм алгебр

$$ASU(2) \approx ASO(3). \quad (6.8)$$

Во-вторых, мы можем умножить все генераторы  $I_i$  на  $i$ , переходя к новым генераторам

$$J_i = iI_i = \tilde{L}_i/2i.$$

Тогда для новых генераторов получатся соотношения

$$[J_i, J_k] = i\epsilon_{ijk}J_k,$$

известные из квантовой механики как алгебра угловых моментов.

## 6.2 Гомоморфизм $SU(2) \rightarrow SO(3)$

После того, как мы доказали изоморфизм (6.8) алгебр Ли, можно было бы осторожно предположить, что совпадают и группы Ли, указанные в заголовке. Мы построим гомоморфизм унитарной группы в ортогональную и убедимся, что группы не совпадают.

Сначала рассмотрим эрмитову матрицу вида

$$H = \begin{pmatrix} z & x - iy \\ x + iy & -z \end{pmatrix}.$$

Эта матрица получилась как скалярное произведение  $H = \mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\sigma}$ , где  $\mathbf{r} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ , а  $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$  — вектор, составленный из матриц Паули. Если теперь преобразовать матрицу  $H$  с помощью унитарной матрицы  $U \in SU(2)$ :

$$H' = UHU^\dagger, \quad H' = \begin{pmatrix} z' & x' - iy' \\ x' + iy' & -z' \end{pmatrix},$$

мы получим новую матрицу  $H'$  с параметрами  $x', y', z'$ , но определитель будет тем же самым в силу унитарности  $U$ :

$$-\det H = x^2 + y^2 + z^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 = -\det H'.$$

Даже не выписывая явно преобразования  $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}'$ , можно понять, что оно линейное:

$$\mathbf{r}' = R\mathbf{r},$$

а матрица  $R$  должна быть ортогональной, чтобы сохранялась норма вектора  $g$ . Мы ввели правило, по которому каждой унитарной матрице  $U \in SU(2)$  сопоставляется ортогональная матрица  $R \in SO(3)$ . Если у нас имеется произведение двух унитарных матриц  $U = U_1 U_2$ , то

$$H' = U_1(U_2 H U_2^\dagger)U_1^\dagger,$$

следовательно ортогональное преобразование тоже дается произведением матриц

$$U_1 \rightarrow R_1, U_2 \rightarrow R_2, U \rightarrow R = R_1 R_2.$$

Таким образом, искомый гомоморфизм построен.

Является ли он изоморфизмом? Ответ — нет, потому что в правило входит пара матриц  $U$  и  $U^\dagger$ . Если сменить знак  $U \rightarrow -U$ , то у сопряженной матрицы тоже сменится знак  $U^\dagger \rightarrow -U^\dagger$ , а матрица  $H'$  не изменится. Значит двум различным унитарным матрицам  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  и  $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  отвечает одна ортогональная

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

и отображение не получилось взаимно-однозначным.

С алгебраической точки зрения можно написать

$$SO(3) \approx SU(2)/C_2,$$

т.е. ортогональная группа изоморфна фактор-группе унитарной группы по дискретной нормальной подгруппе, состоящей из двух элементов (единичной и минус единичной матрицы  $2 \times 2$ ).

С геометрической точки зрения  $SU(2)$  это единичная сфера  $S^3$  в пространстве  $\mathbb{R}^4$ , задаваемая уравнением  $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ , рис. 6.1. Чтобы явно построить дифференцируемое отображение многообразия  $SU(2)$  на  $SO(3)$  ограничимся частным случаем однопараметрической подгруппы. В примере 6.3 мы построили генераторы группы  $SO(3)$ , выберем генератор  $I_2$ . Из примера 6.5 возьмем соответствующий генератор  $SU(2)$ , который согласно (6.7) равен  $-i\sigma_2/2$ :

$$I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{ASO}(3), \quad i\sigma_2/2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{ASU}(2).$$

Восстановим по генераторам элементы соответствующих групп:

$$O(\theta) = \exp I_2 \theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \in \mathbf{SO}(3), \quad (6.9)$$

$$U(\theta) = \exp \left( -\frac{i}{2} \sigma_2 \theta \right) = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & \sin \frac{\theta}{2} \\ -\sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \in \mathbf{SU}(2). \quad (6.10)$$

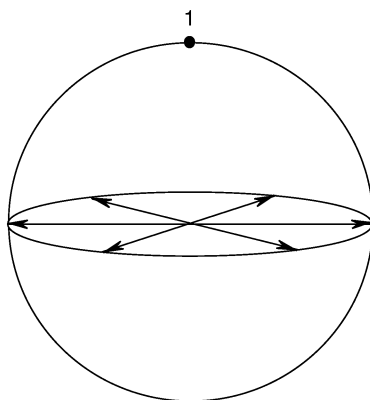


Рис. 6.1: Многообразия групп  $SU(2)$  и  $SO(3)$ : сфера  $S^3$  и проективная сфера  $\mathbb{R}P^3$ , «северное полушарие» с отождествленными (как условно показано стрелками) диаметрально противоположными точками «экватора».

Естественно задать отображение правилом  $U(\theta) \rightarrow O(\theta)$

Однопараметрическая подгруппа отвечает «меридиану», показанному на рис. 6.1:  $\theta = 0$  соответствует единичной матрице  $E_2$  («северному полюсу» рисунка). Увеличивая  $\theta$ , мы непрерывно пройдем по «меридиану» через «экватор»  $\theta = \pi$  «южному полюсу»  $\theta = 2\pi$ ,  $U = -E_2$ . Матрица вернется к исходному значению  $U = E_2$  только при  $\theta = 4\pi$ . В группе  $SO(3)$  «северное» и «южное» полушария соответствуют одному и тому же вращению (6.9). Вся сфера отображается на верхнюю полусферу, причем противоположные точки «экватора» считаются тождественными. На рис. 6.1 отождествление противоположных точек условно показано стрелками. Каждый образ  $O(\theta)$  в  $SO(3)$  имеет два прообраза  $U(\theta)$  и  $U(\theta + 2\pi)$  в  $SU(2)$ , как видно из (6.9), (6.10). В общем случае, когда у каждой точки образа имеются дискретные прообразы, отображение называют *накрытием*.

Пример 6.6. В одномерном случае примером накрытия является отображение  $\mathbb{R} \rightarrow S^1$ . Числовую ось можно представить себе как нить, которая наматывается на окружность. Каждой точке окружности отвечает бесконечное число прообразов, поэтому данное отображение — бесконечнолистное накрытие. Двумерным примером бесконечнолистного накрытия служит отображение плоскости  $\mathbb{R}^2$  на тор  $T^2$ . Плоскость делится на одинаковые прямоугольные клетки, противоположные стороны каждого прямоугольника склеиваются. Каждой точке тора соответствуют счетное множество дискретных прообразов на плоскости, показанных на рис. 6.2. Пример двулистного накрытия известен из теории функций комплексной переменной. Риманова поверхность функции  $w = \sqrt{z}$  представляет собой два экземпляра комплексной плоскости  $\mathbb{C}$ , разрезанных, например, вдоль отрицательной действительной полуоси. Верхний берег разреза каждого экземпляра склеивается с нижним берегом разреза другого экземпляра. Если полученную поверхность гладко отобразить на комплексную плоскость, получится двулистное накрытие. Каждый лист соответствует своей ветви квадрат-

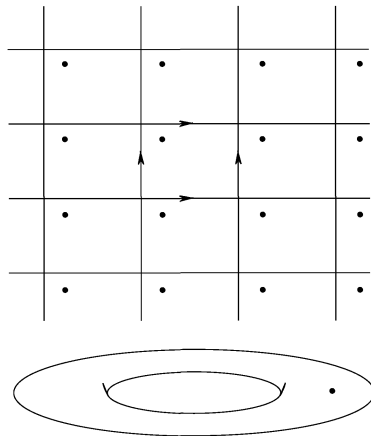


Рис. 6.2: Отображение  $\mathbb{R}^2 \rightarrow T^2$ : черными кружками показаны прообразы одной точки тора, а стрелками ориентация противоположных сторон каждого прямоугольника при их склеивании.

ного корня  $\sqrt{1} = \pm 1$

Таким образом, хотя алгебры Ли групп  $SU(2)$  и  $SO(3)$  изоморфны, сами группы неизоморфны. Окрестности единицы в этих группах, которые называют группами вращений, устроены одинаково, а глобальная топология у них разная. По экспоненциальной формуле восстанавливается односвязная группа  $SU(2)$ , в соответствии с теоремой 5.1. Для группы  $SO(3)$ , которую тоже можно восстановить по алгебре Ли, группа  $SU(2)$  является накрывающим множеством.