Лекция 7

Представления группы $\mathrm{SO}(3)$

7.1 Матричные представления

В данной лекции мы построим неприводимые представления алгебры $\mathrm{ASO}(3)$, которая изоморфна алгебре угловых моментов

$$[J_i, J_j] = ie_{ijk}J_k. \tag{7.1}$$

Такой выбор генераторов удобнее, чем первоначальные операторы I_i, потому что все $J_i = iI_i$ получились эрмитовыми. Мы уже знаем одно точное трехмерное неприводимое представление матрицами **(6.5)**, но нам надо проверить, есть ли неприводимые матричные представления других размерностей. Поэтому мы уже не предполагаем, что J_i — матрицы 3×3, а ищем представления алгебры произвольной размерности. По представлению алгебры Ли можно будет потом по экспоненциальной формуле восстановить представление группы.

Оператор Казимира

Определение 7.1. *Оператором Казимира* называется квадратичная комбинация генераторов, которая коммутирует со всеми генераторами.

Оператор Казимира классифицирует неприводимые представления. Набор его собственных векторов, принадлежащих одному собственному значению, образует базис неприводимого представления. Это следует из леммы Шура.

Пользуясь формулами **(7.1)**, вычислим два коммутатора

$$[J_1, J_2^2] = J_2[J_1, J_2] + [J_1, J_2]J_2 = iJ_2J_3 + iJ_3J_2,$$
$$[J_1, J_3^2] = J_3[J_1, J_3] + [J_1, J_3]J_3 = -iJ_2J_3 - iJ_3J_2$$

и сразу убедимся, что $J^2 = J_1^2 + J_2^2 + J_3^2$ как раз и является оператором Казимира:

$$[J^2, J_1] = 0.$$

Аналогично можно показать, что и остальные генераторы тоже коммутируют с J^2.

Повышающий и понижающий операторы

Построим операторы $J_\pm = J_1 \pm iJ_2$ и найдем их коммутаторы с оператором J_3:

$$
\begin{aligned}
[J_+, J_3] &= [J_1, J_3] + i[J_2, J_3] = -iJ_2 - J_1 &= -J_+, \qquad (7.2)\\
[J_-, J_3] &= [J_1, J_3] - i[J_2, J_3] = -iJ_2 + J_1 &= +J_-. \qquad (7.3)
\end{aligned}
$$

Оператор J^2 коммутирует с J_3, поэтому можно выбрать базис из общих собственных векторов. Обозначим собственные векторы $|\lambda\, m\rangle$:

$$J^2|\lambda\, m\rangle = \lambda|\lambda\, m\rangle, \quad J_3|\lambda\, m\rangle = m|\lambda\, m\rangle.$$

Тогда из (7.2)

$$J_3J_+|\lambda\, m\rangle = (J_+J_3 + J_+)|\lambda\, m\rangle = (m+1)J_+|\lambda\, m\rangle,$$

значит $J_+|\lambda\, m\rangle$ — собственный вектор оператора J_3 с собственным значением $(m+1)$. Такой вектор с точностью до постоянного множителя (обозначим его b_m) равен $|\lambda\ m+1\rangle$:

$$J_+|\lambda\ m\rangle = b_m|\lambda\ m+1\rangle. \qquad (7.4)$$

Оператор с таким свойством называется *повышающим*. Можно выбрать в качестве определения повышающего оператора его коммутатор (7.2) с J_3. Оператор J_- с коммутатором, удовлетворяющим правилу (7.3) назовем *понижающим*. Понижающий оператор на единицу уменьшает m:

$$J_-|\lambda\ m\rangle = a_m|\lambda\ m-1\rangle, \qquad (7.5)$$

где a_m коэффициент. Сравнивая (7.4) с (7.5) и пользуясь тем, что повышающий и понижающий операторы в нашем случае получаются друг из друга эрмитовым сопряжением

$$J_+ = J_-^\dagger,$$

можно вывести связь между коэффициентами

$$a_m = b_{m-1}^*. \qquad (7.6)$$

Лестница состояний

$$
\begin{aligned}
&\underline{\qquad\qquad}\ |\lambda,\, m+2\rangle\\
&\underline{\qquad\qquad}\ |\lambda,\, m+1\rangle\\
&\underline{\qquad\qquad}\ |\lambda,\, m\rangle\\
&\underline{\qquad\qquad}\ |\lambda,\, m-1\rangle\\
&\underline{\qquad\qquad}\ |\lambda,\, m-2\rangle
\end{aligned}
$$

Теперь подействуем на вектор $|\lambda\, m\rangle$ несколько раз повышающим оператором. Согласно (7.4) его номер m будет каждый раз увеличиваться на единицу. Если же действовать понижающим оператором, номер будет уменьшаться. Главный вопрос, будет ли этот процесс продолжаться до бесконечности в ту и другую сторону или оборвется. Если процесс оборвется и с той, и с другой стороны, неприводимое представление получится конечномерным. Оказывается, всегда можно построить унитарное конечномерное представление если группа компактна. Мы сформулируем это утверждение в виде теоремы 7.2. В нашем случае все координаты на группе — углы и изменяются от нуля до π или 2π, но не до бесконечности, так что группа компактна.

Чтобы построить конечномерные представления, сначала вычислим комбинации операторов

$$\begin{aligned} J_-J_+ &= (J_1 - iJ_2)(J_1 + iJ_2) = J_1^2 + J_2^2 + i[J_1, J_2] &= J^2 - J_3^2 - J_3, \\ J_+J_- &= (J_1 + iJ_2)(J_1 - iJ_2) = J_1^2 + J_2^2 - i[J_1, J_2] &= J^2 - J_3^2 + J_3. \end{aligned}$$

Отсюда получим, что

$$J_-J_+|\lambda\, m\rangle = (\lambda - m^2 - m)|\lambda\, m\rangle, \tag{7.7}$$

$$J_+J_-|\lambda\, m\rangle = (\lambda - m^2 + m)|\lambda\, m\rangle. \tag{7.8}$$

В нашем случае J^2 — эрмитовский неотрицательно определенный оператор, значит λ — вещественное положительное число. Но и комбинации J_+J_-, J_-J_+ тоже эрмитовы и неотрицательно определены, потому что

$$(J_+J_-)^\dagger = J_-^\dagger J_+^\dagger = J_+J_-, \quad \langle\lambda\, m|J_+J_-|\lambda\, m\rangle = a_m^* a_m = |a_m|^2. \tag{7.9}$$

Поэтому числа $\lambda - m^2 \pm m$ не могут стать отрицательными.

Отсюда следует, что есть крайние векторы, один из которых $|\lambda\, m_{\max}\rangle$ обращается в нуль повышающим оператором, а другой $|\lambda\, m_{\min}\rangle$ — понижающим:

$$J_+|\lambda\, m_{\max}\rangle = J_-|\lambda\, m_{\min}\rangle = 0.$$

Из (7.7), (7.8) видно, что такое может случиться, когда

$$\lambda - m_{\max}^2 - m_{\max} = \lambda - m_{\min}^2 + m_{\min} = 0.$$

Обозначим $m_{\max} \equiv j$, тогда $\lambda = j(j+1)$, а для $m_{\min}$ получилось квадратное уравнение. Выберем тот из корней, который не превосходит $m_{\max}$, откуда $m_{\min} = -j$. Итого имеется $2j+1$ векторов:

$$\dim D^{(j)}(g) = 2j + 1.$$

Число ступенек лестницы состояний $2j+1$ должно быть целым, поэтому j может быть только **целым** или **полуцелым.**

Чтобы разобраться с вопросом, все ли значения j допустимы, мы восстановим с помощью экспоненциальной формулы элемент группы, вращение вокруг оси 3 на угол θ:

$$e^{iJ_3\theta} = e^{im\theta}.$$

Если m принимает только целые значения, все в порядке, получилась 2π - периодическая функция угла θ. Если же m полуцелое, период функции станет вдвое больше, $e^{2\pi im} = -1$. Отсюда следует, что набор матриц четного порядка, отвечающих полуцелыми j, не является представлением группы SO(3). Другая формулировка того же факта дается теоремой

Теорема 7.1. *Неприводимые унитарные представления группы* SO(3) *всегда имеют нечетную размерность.*

Что касается полуцелых j, они дают неприводимые представления унитарной группы SU(2). В квантовой механике эти представления описывают частицу с полуцелым спином. В предыдущей лекции было построено гладкое отображение $\mathrm{SU}(2) \to \mathrm{SO}(3)$, которое оказалось двулистным накрытием. Поэтому в унитарной группе функции угла могут быть и 4π - периодическими. Целым j отвечают представления той и другой групп.

Замечание 7.1. Иногда в литературе представления с полуцелым j называют *двузначными* представлениями группы SO(3). Мы не пользуемся таким термином потому, что согласно нашему исходному определению, представление — это гомоморфизм. Значит каждому элементу группы отвечает одна матрица.

Вычисление матричных элементов

Для краткости вместо $\lambda = j(j+1)$ будем писать в векторах j. Матричные элементы понижающего и повышающего операторов

$$a_m = \langle j\, m-1|J_-|j\, m\rangle, \quad b_m = \langle j\, m+1|J_+|j\, m\rangle$$

вычисляются с помощью соотношения (7.6) и формул (7.9), (7.7), (7.8): $|a_m|^2 = j(j+1) - m^2 + m, |b_m|^2 = j(j+1) - m^2 - m$. Тогда с точностью до фазы

$$a_m = \sqrt{j(j+1) - m(m-1)}, \quad b_m = \sqrt{j(j+1) - m(m+1)}.$$

7.2 Представление на гладких функциях координат

Рассмотрим множество гладких функций $f(x, y, z)$, определенных в $\mathbb{R}^3$. Действие элемента группы на функциях мы определили формулой (3.5):

$$gf(\mathbf{r}) = f(g^{-1}\mathbf{r}).$$

Тогда

$$g(\alpha_1, 0, 0)f(x, y, z) = f(x, y\cos\alpha_1 + z\sin\alpha_1, -y\sin\alpha_1 + z\cos\alpha_1);$$

$$I_1 f(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial\alpha_1} g(\alpha_1, 0, 0)f(x, y, z)\Big|_{\alpha_1=0} =$$

$$= \left[(-y\sin\alpha_1 - z\cos\alpha_1)\frac{\partial f}{\partial y} + (y\cos\alpha_1 - z\sin\alpha_1)\frac{\partial f}{\partial z}\right]_{\alpha_1=0} = \left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right) f(x, y, z).$$

Отсюда, циклически переставляя индексы, найдем все генераторы

$$I_1 = y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}, \quad I_2 = x\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial x}, \quad I_3 = x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}.$$

Мы видим, что получились компоненты векторного произведения радиус-вектора и вектора градиента

$$\mathbf{I} = [\mathbf{r} \times \nabla].$$

Реализация генераторов в виде дифференциальных операторов удобна, если мы хотим найти базис неприводимого представления. Задача сведется к поиску собственных функций дифференциального оператора второго порядка — оператора Казимира I^2:

$$I^2 = [\mathbf{r} \times \nabla]^2 = r^2 \triangle - (\mathbf{r}\nabla)^2 = r^2 \triangle_\Omega .$$

Получился угловой оператор Лапласа, который только знаком отличается от оператора квадрата углового момента. Его собственные функции (одновременно являющиеся собственными функциями оператора I_3) хорошо известны — это сферические гармоники $|l\, m\rangle = Y_{lm}(\theta, \varphi)$:

$$\triangle_\Omega Y_{lm}(\theta,\varphi) = -l(l+1)Y_{lm}(\theta,\varphi), \quad I_3 Y_{lm}(\theta,\varphi) = \mathrm{i}mY_{lm}(\theta,\varphi).$$

Таким образом, мы нашли базис неприводимого представления группы $\mathrm{SO}(3)$.

7.3 Неприводимые представления групп вращения

Представление самой низкой размерности, которое у нас получилось, это неприводимое представление с $j = 0$. Это представление естественно не является точным. Величины, которые не преобразуются при поворотах называются скалярами, а представление *скалярным* представлением. Истинный скаляр $V(\mathbf{r})$ не меняется не только при поворотах, но и при отражениям: $V(-\mathbf{r}) = V(\mathbf{r})$. Если же знак меняется, то величина — псевдоскалярная.

Представление с $j = 1/2$ называется *спинорным* представлением группы $\mathrm{SU}(2)$. Матрицу представления обычно параметризуют тремя углами

$$U(\psi,\theta,\varphi) = \begin{pmatrix} e^{i\varphi}\cos\frac{\theta}{2} & e^{i\psi}\sin\frac{\theta}{2} \\ -e^{-i\psi}\sin\frac{\theta}{2} & e^{-i\varphi}\cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}. \qquad (7.10)$$

Представление группы $\mathrm{SO}(3)$ с $j = 1$ точное, оно называется *векторным*. В общем случае точное неприводимое представление наименьшей размерности называется *фундаментальным*. Спинорное представление (7.10) это фундаментальное представление группы $\mathrm{SU}(2)$, а векторное — фундаментальное представление группы $\mathrm{SO}(3)$. Векторы $\mathbf{p}$ в трехмерном евклидовом пространстве преобразуются при вращении по такому представлению, если от декартовых перейти к круговым компонентам вектора

$$p_\pm = p_x \pm ip_y,\ p_0 = p_z.$$

Круговые компоненты преобразуются при вращении как функции $Y_{1m}(\theta,\varphi), m = -1, 0, 1$. Настоящий вектор меняет знак при инверсии, которая, напомним, входит в полную группу ортогональных преобразований $\mathrm{O}(3)$, но не входит в специальную $\mathrm{SO}(3)$. Если знак не меняется: $\mathbf{p}(-\mathbf{r}) = \mathbf{p}(\mathbf{r})$, величина $\mathbf{p}$ — псевдовектор.

Неприводимые представления с целым $j = l \geqslant 2$ называются *тензорными* ранга l, а величины, которые по ним преобразуются называют тензорами. Примеры из физики — два тензора: квадрупольный момент и тензор инерции

$$Q_{ij} = \int \left(\frac{1}{3}r^2\delta_{ij} - x_i x_j\right)\rho(\mathbf{r})\,d\mathbf{r}; \quad I_{ij} = \int (r^2\delta_{ij} - x_i x_j)\rho(\mathbf{r})\,d\mathbf{r},$$

где ρ в первом тензоре — плотность заряда, а во втором — вещества. Квадрупольный момент — бесследовый тензор, поэтому преобразуется как $Y_{2m}(\theta,\varphi), m = -2,-1,0,1,2$. Тензор инерции имеет ненулевой след, поэтому у него 6 компонент, а не 5. Говорят, что это *приводимый* тензор. Если выделить след I_{ii}, то он преобразуется по скалярному представлению $l = 0$, а оставшаяся бесследовая часть — по тензорному представлению $l = 2$.

В заключении сформулируем общее утверждение про конечномерные представления.

Теорема 7.2. *Каждое неприводимое унитарное представление компактной группы Ли конечномерно.*

7.4 Матрицы конечных поворотов

Приведем для справок[1] *матрицы конечных поворотов*, которые иногда называют D-матрицами Вигнера. Конечный поворот $\hat{R}$ можно параметризовать углами Эйлера α,β,γ: 1) поворот на угол α вокруг оси z, 2) поворот на угол β вокруг оси y (линии узлов), 3) поворот на угол γ вокруг оси z' (нового положения оси z). Углы Эйлера можно определять по разному: во втором повороте вместо оси y иногда вращают вокруг оси x. Мы здесь следуем обозначениям [3, §58]. Матрица конечных поворотов (матрица Вигнера) $2j+1$-мерного представления определяется как

$$D^j_{m'\,m}(\alpha,\beta,\gamma) = \left\langle j, m' \left| \exp(\mathrm{i}\hat{J}_3\gamma)\exp(\mathrm{i}\hat{J}_2\beta)\exp(\mathrm{i}\hat{J}_3\alpha)\right| j, m\right\rangle.$$

Элементы такой матрицы суть коэффициенты разложения сферических гармоник преобразованного базиса по исходному базису, так для целых $j = l$

$$Y_{l\,m}(\hat{R}\mathbf{n}) = \sum_{m'=-l}^{l} D^l_{m'\,m}(\hat{R})Y_{l\,m'}(\mathbf{n}).$$

Зависимость от углов α,γ очень простая

$$D^j_{m'\,m}(\alpha,\beta,\gamma) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}m'\gamma+\mathrm{i}m\alpha}d^j_{m'\,m}(\beta),$$

[1] в дополнении к лекции.

а матрица d зависит только от угла β и называется приведенной. Приведенная матрица находится явно

$$d^j_{m'\,m}(\beta) = 2^{-m'}\sqrt{\frac{(j+m')!(j-m')!}{(j+m)!(j-m)!}}(1+\mu)^{\frac{m'+m}{2}}(1-\mu)^{\frac{m'-m}{2}}P^{(m'-m,m'+m)}_{j-m'}(\mu),$$

где $\mu = \cos\beta$, а $P^{(a,b)}_n$ — полиномы Якоби, которые даются формулой

$$P^{(a,b)}_n(\mu) = \frac{(-1)^n}{2^n n!}(1-\mu)^{-a}(1+\mu)^{-b}\frac{d^n}{d\mu^n}(1-\mu)^{a+n}(1+\mu)^{b+n}.$$

Выпишем приведенные матрицы для $j = 1/2, 1, 3/2$

	$m=\frac{1}{2}$	$m=-\frac{1}{2}$
$m'=\frac{1}{2}$	$\cos\frac{\beta}{2}$	$\sin\frac{\beta}{2}$
$m'=-\frac{1}{2}$	$-\sin\frac{\beta}{2}$	$\cos\frac{\beta}{2}$

	$m=1$	$m=0$	$m=-1$
$m'=1$	$\frac{1+\cos\beta}{2}$	$\frac{\sin\beta}{\sqrt{2}}$	$\frac{1-\cos\beta}{2}$
$m'=0$	$-\frac{\sin\beta}{\sqrt{2}}$	$\cos\beta$	$\frac{\sin\beta}{\sqrt{2}}$
$m'=-1$	$\frac{1-\cos\beta}{2}$	$-\frac{\sin\beta}{\sqrt{2}}$	$\frac{1+\cos\beta}{2}$

	$m=\frac{3}{2}$	$m=\frac{1}{2}$	$m=-\frac{1}{2}$	$m=-\frac{3}{2}$
$m'=\frac{3}{2}$	$\cos^3\frac{\beta}{2}$	$\sqrt{3}\cos^2\frac{\beta}{2}\sin\frac{\beta}{2}$	$\sqrt{3}\cos\frac{\beta}{2}\sin^2\frac{\beta}{2}$	$\sin^3\frac{\beta}{2}$
$m'=\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}\cos^2\frac{\beta}{2}\sin\frac{\beta}{2}$	$\frac{\cos\frac{\beta}{2}(-1+3\cos\beta)}{2}$	$\frac{(1+3\cos\beta)\sin\frac{\beta}{2}}{2}$	$\sqrt{3}\cos\frac{\beta}{2}\sin^2\frac{\beta}{2}$
$m'=-\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}\cos\frac{\beta}{2}\sin^2\frac{\beta}{2}$	$\frac{-(1+3\cos\beta)\sin\frac{\beta}{2}}{2}$	$\frac{\cos\frac{\beta}{2}(-1+3\cos\beta)}{2}$	$\sqrt{3}\cos^2\frac{\beta}{2}\sin\frac{\beta}{2}$
$m'=-\frac{3}{2}$	$-\sin^3\frac{\beta}{2}$	$\sqrt{3}\cos\frac{\beta}{2}\sin^2\frac{\beta}{2}$	$-\sqrt{3}\cos^2\frac{\beta}{2}\sin\frac{\beta}{2}$	$\cos^3\frac{\beta}{2}$

Вывод выражения для матрицы поворотов с помощью повышающих и понижающих дифференциальных операторов приведен у Любарского [6]. Другой вывод, основанный на теории гармонических однородных полиномов, описан в книге Годунова и Михайловой [26].