

ЛЕКЦИЯ 11

Обобщенная функция Грина

Рассмотрим вторую часть альтернативы Фредгольма, когда у оператора имеются нулевые моды. Пусть первые k собственных функций принадлежат нулевому собственному значению: $\lambda_m = 0, m = 1, \dots, k$. Можно записать вместо (10.7)

$$\hat{L}_o^{-1} = \sum_m' \frac{1}{\lambda_m} |m\rangle\langle m| \equiv \sum_{m=k+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_m} |m\rangle\langle m|. \quad (11.1)$$

Здесь штрих возле знака суммы означает, что суммирование идет только по ненулевым модам. Получилась сумма по проекторам в ортогональное дополнение к k -мерному подпространству нулевых мод. Такой оператор называют *условно обратным*. В отличие от (10.7), такой оператор всегда определен, а при $k = 0$ он переходит в обычный обратный оператор. Соответствующее интегральное ядро

$$G_0(x, x') = \langle x | \hat{L}_o^{-1} | x' \rangle = \sum_m' \frac{u_m(x) u_m^*(x')}{\lambda_m}$$

называется *обобщенной* (или модифицированной) функцией Грина. Более удачным представляется термин “обобщенная функция Грина”, потому что в случае отсутствия нулевых мод она переходит в обычную функцию Грина. Перечислим основные свойства G_0 .

1. Обобщенная функция Грина ортогональна нулевым модам. Если умножить уравнение (11.1) слева на $\langle l |$, то в силу ортогональности мы получим

$$\langle l | \hat{L}_o^{-1} = \sum_m' \frac{\langle l | m \rangle \langle m |}{\lambda_m} = 0, \quad l = 1, \dots, k. \quad (11.2)$$

2. Обобщенная функция Грина подчиняется уравнению

$$\hat{L}G(x, x') = \delta(x - x') - \sum_{m=1}^k u_m(x) u_m^*(x'), \quad (11.3)$$

где $u_m(x)$ — нормированные нулевые моды. Подействуем на уравнение (11.1) оператором \hat{L} , получится

$$\sum_m' |m\rangle\langle m| = \sum_{m=1}^{\infty} |m\rangle\langle m| - \sum_{m=1}^k |m\rangle\langle m|.$$

Первая сумма в правой части в силу полноты равна единичному оператору. Переходя к координатам x, x' , получим уравнение (11.3).

3. Решение уравнения (11.3) определено неоднозначно, к нему можно добавить линейную комбинацию нулевых мод $\sum_{m=1}^k C_m u_m(x)$. Однако, неопределенность исчезает и все константы C_m находятся однозначно, если потребовать выполнения k условий ортогональности (11.2):

$$\int_{\mathcal{D}} u_m(x) G_0(x, x') dx = 0, \quad m = 1, \dots, k. \quad (11.4)$$

Если оператор не самосопряженный, то надо требовать ортогональности нулевым модам сопряженного оператора.

Пример 11.1. На единичном отрезке найти функцию Грина оператора

$$\hat{L} = \frac{d^2}{dx^2}$$

на пространстве функций с равной нулю производной на концах единичного отрезка

$$\left. \frac{du}{dx} \right|_{x=0} = \left. \frac{du}{dx} \right|_{x=1} = 0.$$

Однородное уравнение $u'' = 0$ имеет общее решение $u(x) = C_1 + C_2 x$, но из граничного условия получаем $C_2 = 0$, значит $k = 1$ и имеется всего одна нулевая мода. Из условия нормировки найдем $C_1 = 1$, тогда уравнение (11.3) на обобщенную функцию Грина получается вида

$$\frac{d^2 G_0}{dx^2} = \delta(x - x') - 1.$$

Решение можно составить из частного решения неоднородного уравнения $u_1(x) = -x^2/2$ и общего решения однородного уравнения:

$$G_0(x, x') = \begin{cases} -\frac{x^2}{2} + A_1 x + B_1, & x < x', \\ -\frac{x'^2}{2} + A_2 x + B_2, & x > x'. \end{cases}$$

Из граничных условий находим два коэффициента $A_1 = 0, A_2 = 1$. Из непрерывности в точке $x = x'$ получаем соотношение $B_1 = B_2 + x'$. Однако условие единичного скачка первой производной не добавляет уравнения, а приводит к

тождеству $1 = 1$. Нам не хватило ровно одного условия, потому что мы пока не использовали требование ортогональности (11.4):

$$-\int_0^1 \frac{x^2}{2} dx + \int_0^{x'} B_1 dx + \int_{x'}^1 (B_2 + x) dx = 0.$$

Вычисляя все три определенных интеграла, находим $B_2 = -x'^2/2 - 1/3$, откуда

$$G_0(x, x') = \begin{cases} -\frac{x^2 + x'^2}{2} + x' - \frac{1}{3}, & x < x', \\ -\frac{x^2 + x'^2}{2} + x - \frac{1}{3}, & x > x'. \end{cases}$$

Ответ можно переписать и в одну строчку: $G_0 = -(x_<^2 + x_>^2)/2 - 1/3 + x_>$.

11.1 Задачи Дирихле и Неймана к уравнению Пуассона

Уравнение Пуассона

$$\Delta u = f(x)$$

обычно решают при двух граничных условиях. Условия вида

$$u|_S = 0$$

называются *задачей Дирихле*, а

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_S = 0$$

— *задачей Неймана*. Здесь $\partial/\partial n$ обозначает производную по внутренней нормали к поверхности S . Конечно, в теории уравнений в частных производных рассматриваются и более сложные задачи, в которых задана линейная комбинация функции и ее нормальной производной, производная взятая под углом к нормали (задача о наклонной производной), нормальная производная на одной части поверхности и функция на другой ее части и т.п. Но мы здесь ограничимся только простейшими постановками Дирихле и Неймана, на примере которых можно понять, как строится функция Грина. Начнем мы, как договорились, с уравнения Пуассона с однородным граничным условием, а в следующей лекции перейдем к уравнению Лапласа с неоднородным условием.

Единственность

Прежде, чем строить функцию Грина, надо убедиться, что у задачи нет нулевых мод. Иначе нам следует построить обобщенную функцию Грина.

Теорема 11.1. *Принцип максимума. Гармоническая в \mathcal{D} функция, непрерывная вплоть до границы, может достигать максимума только на границе \mathcal{S} .*

Предположим противное:

$$M = \max_{x \in \mathcal{D}} u(x) = u(x_0) > \max_{x \in \mathcal{S}} u(x) = m.$$

Введем вспомогательную функцию

$$w(x) = u(x) + \frac{M - m}{2d^2} \|x - x_0\|^2,$$

где d — диаметр области \mathcal{D}

$$d = \text{diam } \mathcal{D} \equiv \max_{x, x' \in D} \|x - x'\|.$$

Значение функции w на границе \mathcal{S} не превосходит

$$w|_{\mathcal{S}} \leq u|_{\mathcal{S}} + \frac{M - m}{2d^2} d^2 = \frac{M + m}{2} < M,$$

значит ее точка максимума тоже лежит внутри области \mathcal{D} . Пусть этот максимум достигается в точке x_1 , тогда все вторые производные в этой точке неположительны

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x_i^2} \leq 0, \quad i = 1, \dots, n,$$

значит и их сумма, Δw , тоже равна нулю или отрицательна. С другой стороны,

$$\Delta w = \Delta u + \frac{(M - m)n}{d^2} = \frac{(M - m)n}{d^2} > 0.$$

Полученное противоречие и доказывает требуемое утверждение.

Следствие 1 — принцип минимума. *Гармоническая функция $u(x)$ может достигать своего минимума только на границе. Для доказательства достаточно применить принцип максимума к функции $-u$.*

Следствие 2 — единственность решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона. *Задача*

$$\Delta u = 0, \quad u|_{\mathcal{S}} = 0$$

имеет только нулевое решение $u \equiv 0$. Действительно, если гармоническая функция равна нулю на границе, она вследствие принципов максимума и минимума не может отличаться от нуля и в области.

Фундаментальные решения

Конкретный вид фундаментального решения уравнения Пуассона зависит от размерности пространства. Для $n = 1$ мы уже строили его в примере 10.2: $g(x, x') = \max(x, x')$. Можно было выбрать в качестве фундаментального решения и $g(x, x') = |x - x'|/2$, добавление гладких решений однородного уравнения не меняет характера особенности при $x = x'$.

При $n = 2$ следует решить уравнение

$$\Delta_2 g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'),$$

где Δ_2 — двумерный оператор Лапласа. Чтобы определить тип особенности, локально проинтегрируем это уравнение по кругу радиуса $\rho = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \rightarrow 0$ вокруг точки $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$. Интеграл дельта-функции равен единице, а интеграл оператора Лапласа по площади круга согласно теореме Гаусса сводится к интегралу по окружности радиальной проекции градиента, а последний в силу симметрии равен производной по радиусу, умноженной на длину окружности

$$\iint \Delta_2 g dS = \oint \nabla_r g ds = 2\pi\rho \frac{dg}{d\rho} = 1.$$

Получается дифференциальное уравнение, решение которого имеет логарифмическую особенность, подобно потенциалу заряженной нити в электростатике

$$g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{\ln |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{2\pi}. \quad (11.5)$$

При $n = 3$ надо решить трехмерное уравнение Пуассона с точечным источником:

$$\Delta g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'),$$

где Δ — трехмерный оператор Лапласа. Интегрируем его по шару радиуса $\rho \rightarrow 0$ и преобразуем интеграл по объему к интегралу по поверхности от градиента

$$\iiint \Delta g dV = \iint \nabla g d\mathbf{S} = 4\pi\rho^2 \frac{\partial g}{\partial \rho} = 1.$$

Решение полученного дифференциального уравнения дает фундаментальное решение

$$g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{1}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad (11.6)$$

которое естественно совпадает с потенциалом точечного заряда в электростатике. При $n > 2$ фундаментальное решение получается убывающим на бесконечности.

Упражнение 11.1. Найдите фундаментальное решение уравнения Пуассона в пространстве произвольной размерности $n > 2$. Ответ:

$$-\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2} - 1\right)}{4\pi^{n/2}|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{n-2}}.$$

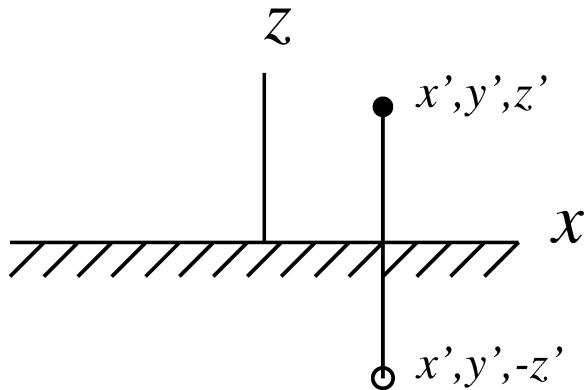


Рис. 11.1: Изображение точечного “заряда”, отраженного в плоскости $z = 0$ к примеру 11.2.

Функция Грина для задачи Дирихле

Чтобы построить функцию Грина задачи Дирихле к уравнению Пуассона, надо к фундаментальному решению добавить какие-нибудь решения уравнения Лапласа, чтобы удовлетворить граничным условиям. Ясно, что получить явные формулы дается только в специальных симметричных случаях. Когда форма области — шар или полупространство, то помогает метод изображений. В двухмерном случае бывает полезен метод конформных преобразований. Оба метода проиллюстрируем примерами.

Пример 11.2. Построить функцию Грина трехмерного уравнения Пуассона для полупространства $z > 0$, которая обращается в нуль на бесконечности и на границе $z = 0$.

Функция Грина строится методом изображений. Надо к фундаментальному решению (11.6) добавить потенциал “заряда-изображения” противоположного знака, расположенного на равном расстоянии под плоскостью $z = 0$, как показано на рис. 11.1. Получится

$$G(x, y, z; x', y', z') = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} + \\ + \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z+z')^2}}.$$

Особенность второго слагаемого лежит вне области \mathcal{D} , второе слагаемое гармонично в верхнем полупространстве, граничные условия выполнены. Значит искаемая функция Грина построена.

Пример 11.3. Построить функцию Грина двумерного уравнения Пуассона внутри круга \mathcal{D} единичного радиуса, которая обращается в нуль на единичной окружности \mathcal{S} .

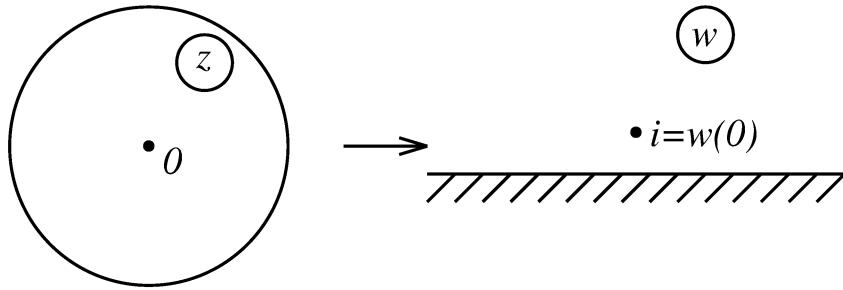


Рис. 11.2: Конформное преобразование (11.7) отображает единичный круг из комплексной плоскости z в верхнюю полуплоскость комплексной плоскости w .

Построим конформное преобразование

$$w(z) = i \frac{1+z}{1-z}. \quad (11.7)$$

Единичная окружность переходит в действительную ось, потому что

$$w|_S = i \frac{1 + e^{i\varphi}}{1 - e^{i\varphi}} = -\operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2}.$$

Начало координат переходит в точку $w(0) = i$. Значит единичный круг отобразится в верхнюю полуплоскость, как показано на рис. 11.2.

Функцию Грина в верхней полуплоскости, которая обращается в нуль на действительной оси, легко построить методом изображений, как это делалось в предыдущем примере. Только вместо трехмерного фундаментального решения надо взять двумерное (11.5):

$$G(w, w') = \frac{1}{2\pi} [\ln |w - w'| - \ln |w - w'^*|].$$

Теперь перейдем к переменной z

$$G(z, z') = \frac{1}{2\pi} \left(\ln \left| \frac{z - z'}{1 - z'} \right| - \ln \left| \frac{z - \frac{1}{z'^*}}{1 - \frac{1}{z'^*}} \right| \right). \quad (11.8)$$

Получилась искомая функция, которая обращается в нуль на единичной окружности $z = e^{i\varphi}$. В этом можно убедиться, вводя полярные координаты $z = re^{i\varphi}$, $z' = \rho e^{i\psi}$. Тогда из (11.8) найдем

$$G(r, \varphi, \rho, \psi) = \frac{1}{4\pi} \left(\ln \frac{r^2 - 2r\rho \cos(\varphi - \psi) + \rho^2}{1 - 2\rho \cos \psi + \rho^2} - \ln \frac{r^2 - 2r \cos(\varphi - \psi)/\rho + 1/\rho^2}{1 - 2 \cos \psi/\rho + 1/\rho^2} \right). \quad (11.9)$$

При $r = 1$ логарифмы в квадратной скобке взаимно уничтожаются.

Тот же ответ можно получить и методом изображений. Как видно из формулы (11.8), нить-изображение противоположного знака надо поместить в точку инверсии.

Метод основан на инвариантности двумерного уравнения Лапласа относительно конформных преобразований $w(z)$:

$$\Delta_z = \frac{\partial^2}{\partial z \partial z^*}, \quad \frac{\partial}{\partial z} = w' \frac{\partial}{\partial w} \Rightarrow \Delta_z = |w'|^2 \frac{\partial^2}{\partial w \partial w^*} = |w'|^2 \Delta_w.$$

Отсюда, если $\Delta_z u = 0$, то и $\Delta_w u = 0$. Подробности метода конформных преобразований изложены в монографии [38].