Лекция 12

Функция Грина второго рода

12.1 Формула Грина для оператора Лапласа

Мы разбили общую неоднородную задачу (10.0) на две полуоднородные задачи (10.1) и (10.2), а потом записали решение первой полуоднородной задачи (10.1) в виде объемного интеграла (10.8). Аналогично, решение второй полуоднородной задачи (10.2) можно записать в виде поверхностного интеграла

$$u(x) = \int_{\mathcal{S}} G_S(x, x') g(x')\, dx', \tag{12.1}$$

где функция $G_S(x, x')$, определенная при $x \in \mathcal{D}, x' \in \mathcal{S}$, называется *функцией Грина второго рода*.

Для трехмерного оператора Лапласа можно вывести *формулу Грина*, которая связывает объемные и поверхностные интегралы. С помощью формулы Грина мы научимся выражать функцию Грина второго рода через функцию Грина первого рода. Рассмотрим две функции $u(x), v(x)$, определенные в $\mathcal{D} \in \mathbb{R}^3$, и найдем разность скалярных произведений

$$(v, \triangle u) - (u, \triangle v) = \iiint_{\mathcal{D}} (v \triangle u - u \triangle v)\, dV = \iiint_{\mathcal{D}} \operatorname{div}(v\nabla u - u\nabla v)\, dV =$$
$$= \iint_{\mathcal{S}} (v\nabla u - u\nabla v)\, d\mathbf{S} = -\iint_{\mathcal{S}} \left(v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n} \right) dS. \tag{12.2}$$

Знак в самом последнем равенстве сменился, потому что символом $\partial/\partial n$ мы обозначаем производную по внутренней нормали, а вектор $d\mathbf{S}$ направлен по внешней нормали.

12.2 Потенциалы простого и двойного слоя

Сформулируем полуоднородные задачи для уравнения Лапласа: задачу Дирихле

$$\triangle\phi = 0, \quad \phi|_{\mathcal{S}} = g(x)$$

и задачу Неймана

$$\triangle\phi = 0, \quad \left.\frac{\partial\phi}{\partial n}\right|_{\mathcal{S}} = h(x).$$

В задаче Неймана имеется нулевая мода $\phi = \mathrm{const}$, поэтому для разрешимости надо потребовать, чтобы она была ортогональной функции $h(x)$. В трехмерном случае получается условие

$$\iint_{\mathcal{S}} h(x)\, dS = 0.$$

Теперь воспользуемся формулой Грина **(12.2)**, подставив вместо $v(x)$ функцию Грина $G(x, x')$ первого рода для уравнения Пуассона $\triangle G = \delta(x - x')$, а вместо $u(x)$ — решение уравнения Лапласа $\triangle\phi = 0$. Получим

$$(G, \triangle\phi) - (\triangle G, \phi) = -\iiint_{\mathcal{D}} \delta(x - x')\phi(x)\, dx = -\phi(x') = -\iint_{\mathcal{S}} \left(G(x, x')\frac{\partial\phi}{\partial n} - \phi\frac{\partial G}{\partial n} \right) dx.$$

Когда второе слагаемое обращается в нуль на $\mathcal{S}$, то есть $\partial G/\partial n = 0$, мы можем подставить $h(x)$ в первое слагаемое и получить решение задачи Неймана. Если же исчезает первое слагаемое, то есть функция Грина первого рода обращается в нуль $G = 0, x \in \mathcal{S}$, то во второе слагаемое можно подставить вместо ϕ функцию $g(x)$ и получится решение задачи Дирихле.

Остается сменить названия переменных $x \leftrightarrow x'$ и воспользоваться принципом взаимности $G(x, x') = G(x', x)$. Найдем

$$\phi(x) = \iint_{\mathcal{S}} \left(G(x, x')\frac{\partial\phi(x')}{\partial n'} - \phi(x')\frac{\partial G(x, x')}{\partial n'} \right) dx', \tag{12.3}$$

где дифференцирование по n' означает дифференцирование по внутренней нормали в пространстве переменной x'. Сравним полученный интеграл по поверхности с определением **(12.1)** функции Грина второго рода.

Первое слагаемое в формуле **(12.3)** дает решение задачи Неймана.

$$G_S(x, x') = G(x, x')|_{x' \in \mathcal{S}}, \quad \left.\frac{\partial G}{\partial n}\right|_{x \in \mathcal{S}} = 0.$$

Итак, чтобы найти функцию Грина для неоднородной задачи Неймана к уравнению Лапласа, надо сначала решить однородную задачу Неймана, то есть построить функцию Грина первого рода уравнения Пуассона, нормальная производная которой обращается в нуль на поверхности, а затем ограничить эту функцию на поверхность.

Второе слагаемое в формуле **(12.3)** дает решение задачи Дирихле.

$$G_S(x, x') = -\left.\frac{\partial G(x, x')}{\partial n'}\right|_{x' \in \mathcal{S}}, \quad G|_{x \in \mathcal{S}} = 0.$$

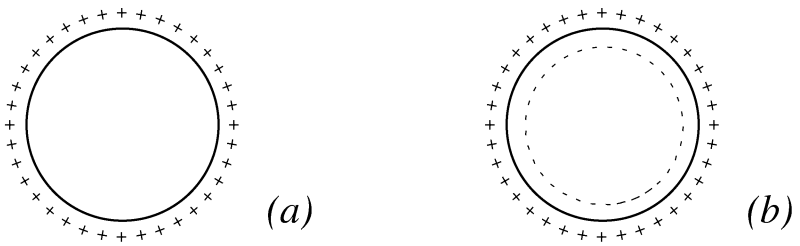


Рис. 12.1: Потенциалы простого (a) и двойного (b) слоя.

Таким образом, чтобы найти функцию Грина второго рода для задачи Дирихле к уравнению Лапласа, надо сначала найти функцию первого рода для однородной задачи Дирихле $G|_{\mathcal{S}} = 0$ к уравнению Пуассона, продифференцировать ее вдоль нормали по второй переменной, а затем зафиксировать положение второй переменной x' на границе $\mathcal{S}$.

Решение полной неоднородной задачи **(10.0)** для уравнения Пуассона

$$\triangle u = f, \quad \hat{B}u\Big|_{x\in\mathcal{S}} = g$$

записывается в виде суммы объемного и поверхностного интегралов:

$$u(x) = \iiint_{\mathcal{D}} G(x,x')f(x')\,dx' + \iint_{\mathcal{S}} G_S(x,x')g(x')\,dx'.$$

Объемный интеграл называется потенциалом *объемного заряда*, второй поверхностный интеграл называется по разному в зависимости от задачи.

Решение задачи Неймана называется потенциалом *простого слоя*, как показано на рис. 12.1 (a). Из электростатики известно, что если на диэлектрике поместить поверхностный заряд, он задаст нормальное электрическое поле, то есть проекцию градиента потенциала на внутреннюю нормаль. Решение задачи Дирихле называется потенциалом *двойного слоя*, рис. 12.1 (b). Если на двух близких замкнутых поверхностях сосредоточены заряды одинаковой величины и противоположного знака, то граничное условие в электростатике — это скачок потенциала при переходе через двойной слой. Функция Грина задачи Дирихле определится разностью двух функций Грина для задачи Неймана

$$G(x,x'-\epsilon/2) - G(x,x'+\epsilon/2) = -\epsilon\frac{\partial}{\partial n'}G(x,x'),$$

где $\epsilon \to 0$ расстояние между слоями зарядов.

Пример 12.1. Найдем функцию Грина двумерной задачи Дирихле для уравнения Лапласа в верхней полуплоскости

$$\triangle u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad u(x,0) = g(x).$$

Сначала найдем функцию Грина первого рода, действуя, как в примере 11.2, но пользуясь двумерным фундаментальным решением (11.5). Нить — изображение поместим в нижней полуплоскости на равном расстоянии, подобно тому, как мы делали с зарядом-изображением в трехмерном случае (рис. 11.1). Получим функцию Грина первого рода

$$G(x,y,x',y') = \frac{1}{2\pi}\left(\ln\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2} - \ln\sqrt{(x-x')^2+(y+y')^2}\right),$$

которая обращается в нуль на оси x. Значит функция Грина второго рода для задачи Дирихле получится после дифференцирования по y' при $y'=0$:

$$G_S(x,y,x') = -\left.\frac{\partial G}{\partial y'}\right|_{y'=0} =$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\left[-\frac{2(y-y')}{(x-x')^2+(y-y')^2} - \frac{2(y+y')}{(x-x')^2+(y+y')^2}\right]_{y'=0} = \frac{1}{\pi}\frac{y}{(x-x')^2+y^2}.$$

Тогда

$$u(x,y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{(x-x')^2+y^2} g(x')\frac{dx'}{\pi}.$$

Пример 12.2. Решить задачу Неймана для области из предыдущего примера, т.е. найти решение уравнения Лапласа в верхней полуплоскости, производная которого принимает на оси x заданное значение $h(x)$.

Функция Грина первого рода отличается от предыдущего примера тем, что нить — изображение надо взять того же знака

$$G = \frac{1}{2\pi}\left(\ln\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2} + \ln\sqrt{(x-x')^2+(y+y')^2}\right),$$

чтобы удовлетворить граничному условию

$$\left.\frac{\partial G}{\partial y}\right|_{y=0} = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{2(y-y')}{(x-x')^2+(y-y')^2} + \frac{2(y+y')}{(x-x')^2+(y+y')^2}\right]_{y=0} = 0.$$

Функция Грина второго рода строится ограничением на ось x, то есть подстановкой $y'=0$

$$G_S = G|_{y'=0} = \frac{1}{2\pi}\ln\left[(x-x')^2+y^2\right].$$

Решение задачи Неймана

$$u(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \ln\left[(x-x')^2+y^2\right] h(x')\frac{dx'}{2\pi}$$

существует, если выполнено условие разрешимости

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} h(x)\,dx = 0.$$

Решение определено с точностью до константы.

Упражнение 12.1. Найдите функцию Грина второго рода для задачи Дирихле в единичном круге. Воспользуйтесь функцией Грина первого рода в полярных координатах (11.9).

Пример 12.3. Адамара. Чтобы ответить на вопрос, почему мы решаем задачи Дирихле и Неймана для уравнения Лапласа, а не ставим задачу Коши, приведем пример, который принадлежит Адамару. Попытаемся решить двумерную задачу Коши, точнее целую последовательность задач при $m = 1, 2, \ldots$, в верхней полуплоскости

$$\triangle u = 0, \quad u(x,0) = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = \nu_m(x) = \frac{\sin mx}{m}.$$

Переменные разделяются в декартовых координатах

$$u(x,y) = X(x)Y(y), \quad \frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = -k^2 \Rightarrow X = \sin kx,\ Y = \operatorname{sh} ky.$$

Решение уже удовлетворяет первому граничному условию, а если выбрать коэффициент $c_m = 1/m^2$ и $k = m$, то получим решение задачи $u(x,y) = \sin mx \operatorname{sh} my/m^2$.

При $m \to \infty$ функция $\nu_m(x)$ может быть сделана сколь угодно малой, а решение получилось неограниченным. Значит задача поставлена некорректно. Корректная постановка задачи по Адамару включает в себя в дополнение к существованию и единственности решения еще и требование устойчивости решения относительно малых шевелений граничных условий. В данном примере сколь угодно малые изменения нулевых граничных условий приводят к катастрофическому изменению решения задачи Коши.

12.3 Уравнение Гельмгольца

Мы уже построили обратный оператор к лапласиану. Но чтобы закончить краткий обзор основных эллиптических операторов, надо рассмотреть еще один важный случай — *оператор Гельмгольца*

$$\hat{L} = \triangle + k^2.$$

Если перед k^2 стоит знак минус, такой оператор тоже называют оператором Гельмгольца. Уравнение Гельмгольца возникает в задачах электродинамики и оптики, когда мы ищем решение волнового уравнения в виде монохроматической

волны. Такое же уравнение возникает в квантовой механике, если нас интересует стационарное состояние уравнения Шредингера для частицы во внешнем поле.

Можно построить две функции Грина первого рода для трехмерной задачи, каждая из которых обращается в нуль на бесконечности. При $k = \mathrm{const}$ обе явно выписываются

$$G^{\pm} = -\frac{\mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}k|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}. \tag{12.4}$$

Они обе удовлетворяют уравнению и граничному условию, имеют правильную особенность при $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$. В этом можно убедиться локальным интегрированием, аналогично тому, как мы искали особенность (11.6) фундаментального решения уравнения Пуассона. Причем и ответ получится тот же самый, потому что член с k^2 при локальном интегрировании обращается в нуль. Функция Грина G^+ называется *расходящейся*, а G^- — *сходящейся* волной. На практике та или иная функция выбирается в зависимости от постановки исходной физической задачи. Функция Грина с постоянным k иногда может быть полезной и для уравнения с переменными коэффициентами. Продемонстрируем на примере, как она позволяет свести дифференциальное уравнение к интегральному.

Пример 12.4. Стационарное уравнение Шредингера имеет вид

$$\left(\triangle + k_0^2 - \frac{2mU}{\hbar^2}\right)\psi = 0,$$

где $k_0^2 = 2mE/\hbar^2$. Если потенциал U мал по сравнению с полной энергией E, можно строить теорию возмущений для задачи рассеяния, считая невозмущенное решение плоской волной $\psi_0 = \exp \mathrm{i}\mathbf{k}_0\mathbf{r}$:

$$\psi(\mathbf{r}) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{k}_0\mathbf{r}} + \psi_1(\mathbf{r}).$$

В задаче рассеяния при больших r решение состоит из плоской падающей волны и расходящейся сферической рассеянной волны. Сходящейся волны нет, поэтому неопределенность снимается и мы пользуемся функцией Грина G^+. Найдем интегральное уравнение для поправки первого порядка ψ_1:

$$\psi_1 = \psi(\mathbf{r}) - \psi_0(\mathbf{r}) = \int G^+(\mathbf{r},\mathbf{r}')\frac{2m}{\hbar^2}U(\mathbf{r}')\psi(\mathbf{r}')\,d\mathbf{r}',$$

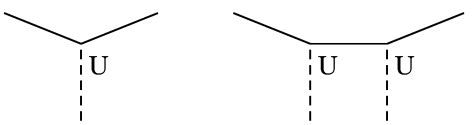
которое называется главным интегральным уравнением теории рассеяния.

Интегральное уравнение решить во всяком случае не легче, чем дифференциальное, однако для интегральных уравнений обычно удобнее строить разложение по малому параметру. С точки зрения теории интегральных уравнений это уравнение Фредгольма второго рода. Такие уравнения можно решать с помощью итераций и получать разложения в ряд, который в математике называется

рядом Неймана, а в физике борновским:

$$\psi(\mathbf{r}) = \psi_0(\mathbf{r}) + \int G^+(\mathbf{r},\mathbf{r}')\frac{2m}{\hbar^2}U(\mathbf{r}')\psi_0(\mathbf{r}')\,d\mathbf{r}' +$$
$$+\int G^+(\mathbf{r},\mathbf{r}')\frac{2m}{\hbar^2}U(\mathbf{r}')\int G^+(\mathbf{r}',\mathbf{r}'')\frac{2m}{\hbar^2}U(\mathbf{r}'')\psi_0(\mathbf{r}'')\,d\mathbf{r}'\,d\mathbf{r}'' + \ldots.$$

Отдельные члены борновского ряда можно изобразить графически



Интеграл по $\mathbf{r}'$ в первой строчке формулы — первое борновское приближение — описывает однократное взаимодействие частицы с полем U. Следующий интеграл по $\mathbf{r}', \mathbf{r}''$, записанный во второй строчке формулы, обозначается второй диаграммой, которая показывает, что частица дважды взаимодействовала с полем, один раз в точке $\mathbf{r}'$, а второй раз в точке $\mathbf{r}''$ и т.д.

Область применимости борновского приближения (область сходимости ряда) можно найти из условия малости первого члена разложения по сравнению с нулевым. Оценка интеграла получается, если учесть, что интегрирование по поперечным координатам по отношению к вектору $\mathbf{k}_0$ проводится до радиуса взаимодействия R, а по продольной координате — до $1/k_0$ из-за осцилляций ψ_0:

$$\frac{2mU}{\hbar}\frac{1}{k_0}R^2\frac{1}{R} \ll 1,$$

где U — характерная величина потенциала взаимодействия. Если учесть, что при $E \gg U$ $k_0 = mv/\hbar$, где v скорость частицы, то условие применимости сводится к неравенству

$$T = \frac{R}{v} \ll \tau = \frac{\hbar}{U}.$$

Время T пролета через яму должно быть меньше характерного времени τ, за которое меняется состояние. При малых скоростях, продольный интеграл обрезается не на $1/k_0$, а на расстоянии R, тогда условие меняется

$$U \ll \frac{\hbar^2}{mR^2}.$$

Потенциальная энергия должна быть мала по сравнению с энергией локализации.

Упражнение 12.2. Пользуясь преобразованием Фурье, выведите формулу (12.4).