Глава 1
Введение

1. Зачем нужна топология физику? 2. Многообразия (аналитическое определение). 3. Многообразия (более общее определение). 4. Учебная литература.

1.1. Зачем нужна топология физику?

Краткий прагматический ответ состоит в следующем: для получения свойств решений физических уравнений без решения самих этих уравнений, т. е. примерно затем же, зачем нужна теория представления групп. Перечислим некоторые возможные приложения топологических методов к решению задач, встречающихся в теоретической физике.

1. Оценка снизу критических точек функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ в зависимости от многообразия, на котором задана функция. Критической мы называем точку $\partial f(x)/\partial x_i = 0\,(i = 1, \ldots, n)$. Она называется невырожденной, если $\det(\partial^2/\partial x_i \partial x_j) \neq 0$. Тогда приращение функции Δf можно записать так:

$$\Delta f = -\sum_{i=1}^{k} (\Delta y_i)^2 + \sum_{j=k+1}^{n} (\Delta y_j)^2; \tag{1.1.1}$$

где $y_i = \sum s_{ij} x_j$; $\{s_{ij}\}$ — матрица, диагонализирующая $\partial^2 f/\partial x_i \partial x_j$. Число отрицательных квадратов k в формуле (1.1.1) определяет тип критической точки; $k = 0$ — минимум, $k = n$ — максимум, в остальных случаях — седло. Обозначим через m_k число критических точек типа k. Минимальные возможные значения этих чисел оказываются зависящими от топологических свойств многообразия, на котором задана дважды дифференцируемая функция f, а именно от структуры групп гомологий этого многообразия — от их чисел Бетти. Из теоремы Вейерштрасса о достижении непрерывной функцией на компактном многообразии своих нижней и верхней границ следует, что $m_0 \geqslant 1$ и $m_n \geqslant 1$.

Теория гомологий делает возможными более содержательные оценки. Например, общее число невырожденных критических точек на двумерном торе должно быть не менее четырех ($m_0 \geqslant 1, m_1 \geqslant 2, m_2 \geqslant 1$); на проективной плоскости, т. е. на поверхности, топологически эквивалентной проективной плоскости, должно быть не менее трех, а в n-мерном проективном пространстве — не менее $n \neq 1$. Такие же оценки можно дать для всех замкнутых многообразий, в частности двумерных, и, следовательно, для функций на конечно-листных римановых поверхностях. К этой же категории приложений относится оценка числа экстремальных значений функционалов в зависимости от топологических свойств пространства функций, на котором этот функционал задан.

2. Вопрос о критических точках тесно связан с векторными полями на многообразиях. Это ясно, в частности, для потенциальных полей, являющихся градиентом некоторой функции, поскольку критическая точка функции является особой точкой векторного поля градиента этой функции (точкой «неоднозначности»), векторы в бесконечно близких точках отличаются по направлению конечным образом. Теория связывает свойства векторных полей на многообразиях с топологическими свойствами этого многообразия. В частности, она позволяет оценить число особых точек векторного поля и указать многообразия, на которых возможны поля без особенностей. Например, задать на сфере поле без особенностей, направленное в каждой точке по касательной к сфере нельзя, а на торе можно; это связано с тем, что эйлерова характеристика тора равна нулю, а сферы — двум[1]. Топология дает возможность указать свойства векторных и тензорных полей, аналогичные упомянутым, для более сложных многообразий более высокой размерности.

3. Оценка числа особых точек аналитической функции, имеющей в заданной области D конечное число таких точек, в зависимости от топологических свойств области D. Вряд ли нужно комментировать значимость этих результатов для физических приложений. На первый взгляд, кажется, что получить нетривиальные

[1]Этот результат иногда называют «теоремой о еже». Согласно этой теореме, шаровой «ёж не может быть причесан». Упомянутый результат был получен Пуанкаре, доказавшем теорему об индексах особых точек векторного поля (сумма индексов особых точек равна эйлеровой характеристике). На многомерные многообразия эта теорема была обобщена много позже Х. Хопфом (1926 г.).

оценки, задавая одну только область D, невозможно, поскольку, например, наличие полюсов определяется динамикой, скажем, потенциалом, его глубиной и протяженностью. В действительности, однако, потенциал определяет область аналитичности — структуру римановой поверхности и для оценок снизу общего числа особенностей этого оказывается достаточным (вспомним, что для указания числа уровней достаточно знать некоторые интегральные моменты потенциала, тогда как локализация полюсов существенно зависит от деталей поведения потенциала как функции расстояния или импульсов).

Чтобы пояснить рассматриваемый вопрос, заметим, что общеизвестный факт отсутствия связанных состояний при слабом притяжении в трехмерном пространстве и, наоборот, наличие их при сколь угодно слабом притяжении в пространстве низших размерностей, есть на самом деле следствие топологических свойств многообразий. Далее, то обстоятельство, что не существует отличных от константы функций, аналитичных во всей комплексной плоскости, включая бесконечно удаленную точку, есть следствие топологической эквивалентности комплексной плоскости двумерной сфере, эйлерова характеристика которой, как упоминалось выше, положительна. В этом смысле, тот факт, что целые функции обязаны иметь особенность в бесконечно удаленной точке, имеет общий корень с теоремой о еже. Вообще, задача об особых точках аналитической функции связана с п. 2, так как задание аналитической функции означает и задание соленоидального векторного поля (действительная и мнимая части — гармонические функции) — градиента действительной части.

4. Приложения к интегрированию по многомерным областям: выяснение аналитических свойств функций, заданных многомерными интегралами, вычисление интегралов по замкнутым многообразиям (обобщение формулы Коши). С первым из этих двух направлений связано применение топологии к исследованию фейнмановских интегралов, вторая же группа задач принадлежит к числу самых давних проблем, фактически создавших топологию как математическую дисциплину.

5. Определение максимального числа линейно-независимых полей на многообразиях. Речь идет о векторных или, вообще, о тензорных полях, хотя не для всех полей и многообразий эта задача решена. Поясним проблему. Для евклидова пространства n-измерений задача тривиальна, однако для многообразия той же размерности, но с топологической структурой, отличной от евклидова пространства, проблема весьма не тривиальна, если не считать поле вложенным в евклидово пространство большого числа измерений, т. е. требовать, чтобы вектор поля в любой точке был касательным к многообразию, а не «торчал, высовываясь в пространство большего числа измерений». Приведем для иллюстрации некоторые результаты о числе линейно-независимых векторных полей на сферах. Во-первых, оказывается, что максимально возможное число линейно-независимых полей совпадает с размерностью сферы только в трех случаях $n = 1, 3, 7$ ($n = 1$ — окружность). Во-вторых, для произвольного n ответ такой. Записываем число n в виде:

$$n = (2a + 1) \cdot 2^{4b+c} - 1.$$

Тогда число $m(n)$ линейно-независимых полей на сфере размерности n определяется равенством:

$$m(n) = 2^c + 8b - 1. \tag{1.1.2}$$

В частности, из этой формулы следует, что в соответствии с теоремой о еже на двумерной сфере вообще нельзя задать непрерывного векторного поля $-m(z) = 0$.

6. Убедиться в существовании решений и оценить число независимых решений некоторого уравнения. Имеющиеся здесь результаты относятся в основном к системам обыкновенных дифференциальных уравнений, однако они эвристически полезны для исследования уравнений в частных производных.

Пункты 1–3 этого перечня опираются главным образом на ту главу алгебраической топологии, которая получила название *теории гомологий*. Многие результаты, приведенные здесь (пп. 1, 3), составляют содержание *теории М. Морса*, в которой важную роль играют топологические *«квантовые числа» — числа Бетти*. Пункты 4–6 требуют использования *теории гомотопий* и *теории расслоений* (особенно это относится к пп. 5, 6).

Приведенные примеры заведомо не исчерпывают известных и тем более потенциальных возможных применений топологических методов к решению математических задач, которые могут интересовать физиков. Хотелось подчеркнуть в связи с этим следующее.

Всякая методика, позволяющая исследовать свойства решений физических уравнений, не решая этих уравнений, выявляет нечто, заложенное уже в самой формулировке математического аппарата физической теории, и, следовательно, не зависящее от деталей динамики. До тех пор пока это «нечто» не выявлено, его следствия могут ошибочно относиться к специфике тех или иных взаимодействий решаемых физических моделей или разного рода приближений. Надо иметь в виду также, что математика для физики является не только и даже не столько вычислительным средством, но и тем каркасом, без которого физические закономерности вообще не могут быть сформулированы. В частности, невозможно дать определения физических величин, не опираясь на соответствующие математические понятия. Например, нельзя точно определить понятие спин без теории представлений. То же относится к квантовым числам динамических симметрий (изоспин и др.). Изложенное дает основание ожидать от разработки не замеченных ранее глубоких феноменологических пластов теории интересных физических результатов.

Если говорить о физике частиц, то к привлечению топологических методов побуждает, по мнению авторов, обилие нестабильных частиц. Всякая серьезная попытка понять это многообразие приводит пока либо к многоканальным задачам типа уравнений связанных каналов, либо к поискам пространственно локализованных решений (солитонов) уравнений в частных производных. Связь этих проблем с упоминавшимися выше приложениями топологических методов довольно ясна. Необходимость же обогащения традиционного аппарата физической теории новыми методами ощущается по меньшей мере по следующим трем причинам.

Во-первых, решение многоканальных задач на собственные значения выглядит настолько сложным даже в простейших моделях, что уверенное отделение общих закономерностей от модельно-зависящих результатов в рамках обычной методики оказывается чрезвычайно трудным, если не невозможным. Между тем по численным результатам решения некоторых модельных задач чувствуется, что в количестве уровней, их положении и движении в зависимости от исходиых параметров (констант взаимодействия, их радиусов, масс структурных компонентов) имеются определенные общие закономерности. Грубо говоря, если при каких-то значениях исходных параметров в S-матрице имеется полюс, то изменением параметров от него не так легко избавиться — удаление одних полюсов от физической области, компенсируется «приходом» других с разных листов римановой поверхности и т. п. Физическая «непрозрачность» подобного рода результатов несомненно связана с усложнением римановой поверхности для S-матрицы и наводит на мысль о необходимости использования более компактной математической методики, органически адекватной природе рассматриваемой задачи.

Во-вторых, современной физике частиц явно не хватает квантовых чисел. Использование знакомого источника — введения групп динамических симметрий и применения теории представлений этих групп — «обогащает» физику таким количеством исходных «сущностей» (кварки) с «цветом», «запахом», «очарованием», «красотой» и т. п.), что оно становится сравнимым с количеством объектов, подлежащих объяснению.

В-третьих, желание иметь «асимптотически свободную» перенормируемую теорию, не содержащую трудностей типа «нуля заряда», побуждает вводить векторные неабелевы калибровочные поля, а это означает обязательность рассмотрения векторных полей на многообразиях. К этой же необходимости, впрочем, приводит упомянутая выше проблема поиска солитонных решений для классических полей со спином.

Настоящий курс ставит своей целью описание и разъяснение некоторых основных понятий, методов и результатов алгебраической топологии. Доказательств, как правило, нет: справедливость тех или иных теорем демонстрируется на примерах. Определения не претендуют на строгость; они сформулированы так, чтобы по возможности более отчетливо выступала сущность — «физический смысл» того или иного понятия. Одним словом, это лекции физика для физиков. К лекциям приложен список учебной литературы: он отнюдь не полон, а содержащиеся в нем книги, может быть, и не лучшие. Монографий по алгебраической топологии много, но большей частью для физиков они остаются за семью печатями главным образом из-за дедуктивного способа изложения, терминологии и непривычной символики.

Несвободны от этих особенностей и руководства, указанные в списке.

В заключение этого параграфа сделаем краткое историческое замечание. С рождением топологии связаны имена Римана, итальянского математика Бетти (E. Betti) и Пуанкаре. Риман, по-видимому, первый догадался о существовании этой области математики. На это его натолкнули исследования аналитических функций. Систематических публикаций по топологии у Римана не было, неизвестно, в частности, что ему принадлежит идея введения порядка связности замкнутой поверхности. Эта идея была сообщена им Бетти, который после смерти Римана (1966 г.) опубликовал ее и попытался обобщить на многомерные поверхности. Что же касается роли Пуанкаре в развитии топологии, то ее можно охарактеризовать очень кратко — он ее создал[2] в работе Analysis situs (1895 г.) и пяти дополнениях к ней. Пуанкаре принадлежат основные идеи, разрабатываемые до сих пор, и важнейшие результаты. Он же является автором многих терминов (гомеоморфизм, гомологи, фундаментальная группа многообразия и др.)

1.2. Многообразия (аналитическое представление)

Топологическое многообразие — это, вообще говоря, множество точек, для которых определено понятие близости. В частности, топологическим многообразием является множество точек евклидова пространства, определенное уравнениями:

$$\begin{array}{ll} F_i(x_1,\dots,x_{\overline{n}})=0, & f_j(x_1,\dots,x_{\overline{n}})>0 \\ i=1,\dots,m & j=1,\dots,l \end{array} \tag{1.2.1}$$

Многообразие (1.2.1) является таким образом некоторой областью подпространства $n=\overline{n}-m$ измерений. Граница многообразия определяется уравнениями:

$$\begin{array}{ll} F_i=0, & f_k=0\ (f_j>0,\ j\neq k,\ k=1,\dots,l). \\ i=1,\dots,m & \end{array} \tag{1.2.2}$$

Как следует из (1.2.2), размерность границы ΔM будет $n-1$. Если система (1.2.2) *не имеет решений*, то *многообразие неограничено.*

---

[2] См. П. С. Александров в ссылке [21].