Несвободны от этих особенностей и руководства, указанные в списке.

В заключение этого параграфа сделаем краткое историческое замечание. С рождением топологии связаны имена Римана, итальянского математика Бетти (E. Betti) и Пуанкаре. Риман, по-видимому, первый догадался о существовании этой области математики. На это его натолкнули исследования аналитических функций. Систематических публикаций по топологии у Римана не было, неизвестно, в частности, что ему принадлежит идея введения порядка связности замкнутой поверхности. Эта идея была сообщена им Бетти, который после смерти Римана (1966 г.) опубликовал ее и попытался обобщить на многомерные поверхности. Что же касается роли Пуанкаре в развитии топологии, то ее можно охарактеризовать очень кратко — он ее создал[2] в работе Analysis situs (1895 г.) и пяти дополнениях к ней. Пуанкаре принадлежат основные идеи, разрабатываемые до сих пор, и важнейшие результаты. Он же является автором многих терминов (гомеоморфизм, гомологи, фундаментальная группа многообразия и др.)

1.2. Многообразия (аналитическое представление)

Топологическое многообразие — это, вообще говоря, множество точек, для которых определено понятие близости. В частности, топологическим многообразием является множество точек евклидова пространства, определенное уравнениями:

$$\begin{array}{ll} F_i(x_1,\dots,x_{\overline{n}})=0, & f_j(x_1,\dots,x_{\overline{n}})>0 \\ i=1,\dots,m & j=1,\dots,l \end{array} \tag{1.2.1}$$

Многообразие (1.2.1) является таким образом некоторой областью подпространства $n=\overline{n}-m$ измерений. Граница многообразия определяется уравнениями:

$$\begin{array}{ll} F_i=0, & f_k=0\ (f_j>0,\ j\neq k,\ k=1,\dots,l). \\ i=1,\dots,m & \end{array} \tag{1.2.2}$$

Как следует из (1.2.2), размерность границы ΔM будет $n-1$. Если система (1.2.2) *не имеет решений*, то *многообразие неограничено.*

[2]См. П. С. Александров в ссылке [21].

Два многообразия M и M' называются *гомеоморфными, если существует взаимно-однозначное, взаимно непрерывное отображение одного многообразия на другое* (две близкие точки переходят в две близкие). Аналитически это означает, например, что функции F_i и F'_i в (1.2.1) переводятся друг в друга заменой x на x' по формулам:

$$x'_i = \varphi_i(x),\ i = 1, \dots, \overline{n}, \tag{1.2.3}$$

причем функции φ_i — однозначны, непрерывны и дифференцируемы, а якобиан преобразования нигде не равен нулю. В остальном же эти функции произвольны. Ясно, что эти преобразования, которые только можно себе представить, или во всяком случае наиболее общие из тех, с которыми физикам приходилось сталкиваться до сих пор. Многообразия можно задавать и способом, отличным от (1.2.1). Например, параметрическим:

$$\begin{array}{ll} x_i = G_i(\Theta_1, \dots, \Theta_n), & g_k(\Theta_1, \dots, \Theta_n) > 0. \\ i = 1, \dots, n & k = 1, \dots, \overline{m} \end{array} \tag{1.2.4}$$

В случае задания (1.2.4) неравенства не всегда определяют границу, а, например, могут просто ограничивать область изменения аргументов периодических функций G_i. Заметим, что иногда задания (1.2.4) предпочтительнее (1.2.1). Например, если (1.2.1) дополнить требованием «невырожденности», а именно требованием, чтобы миноры порядка m матрицы $\dfrac{\partial F_i}{\partial x_j}$ одновременно не обращались в ноль ни в одной точке многообразия, то уравнения (1.2.1) не будут содержать неориентируемые многообразия типа проективной плоскости и др. Между тем аналогичное требование на матрицу $\dfrac{\partial G_i}{\partial x_j}$ для уравнений (1.2.4) не исключает неориентируемых многообразий. Этот феномен связан с тем, что замкнутые неориентируемые многообразия содержат самопересечения.

Предметом топологии как раз и является изучение тех *свойств многообразий, которые инвариантны относительно* всевозможных *непрерывных отображений (1.2.3)*. При этом, вообще говоря, рассматриваемые преобразования могут быть даже не столь гладкими, как мы это требовали. Именно функции φ_i обязаны быть *непрерывными*, но *не обязательно дифференцируемыми.* Ввиду общности топологических преобразований (1.2.3) довольно ясно, что в наших исходных определениях много лишнего. Очевидно, что совершенно не важен ни с принципиальной, ни с практической точек зрения аналитический вид F_i, определяющих такое многообразие, раз мы все равно будем его деформировать непрерывным образом до неузнаваемости. Важно нечто, выражаемое уравнениями (1.2.1), но не явный вид этих уравнений. Точно так же совершенно несущественно, что наше многообразие является областью именно евклидова пространства, а не какого-нибудь другого. От метрики нам здесь требуется только одно — возможность определить близость точек.

Указанные причины побудили математиков сформулировать определения топологических объектов так, чтобы все «лишнее» было убрано и чтобы таким образом истинная природа тех или иных топологических свойств была максимально выделена, если угодно, обнажена. Соответствующая аксиоматика, однако, сильно теряет в наглядности и некоторые вполне привычные понятия и объекты в такой теоретико-множественной формулировке становятся неузнаваемыми. Мы будем пользоваться таким языком в самой минимальной мере, теряя в математической общности, но выигрывая в наглядности. Вместе с тем для связи с математической литературой в следующем параграфе мы приведем определения некоторых исходных топологических понятий на теоретико-множественном языке. Подчеркнем, что в данном случае этот язык не является «веерштрассовщиной», а действительно адекватен математической сущности вещей.

1.3. Многообразия (более общая формулировка)

В этом параграфе приводятся некоторые формальные теоретико-множественные определения. Читатель-физик, столкнувшись с определением топологического многообразия в математических монографиях, может не узнать в аксиоматических определениях формулы предыдущего параграфа. Для понимания текста лекций вполне достаточно мыслить топологические многообразия как множества, которые локально устроены как евклидовы пространства и склеены с надлежащей степенью гладкости.