не обязательно дифференцируемыми. Ввиду общности топологических преобразований (1.2.3) довольно ясно, что в наших исходных определениях много лишнего. Очевидно, что совершенно не важен ни с принципиальной, ни с практической точек зрения аналитический вид F_i, определяющих такое многообразие, раз мы все равно будем его деформировать непрерывным образом до неузнаваемости. Важно нечто, выражаемое уравнениями (1.2.1), но не явный вид этих уравнений. Точно так же совершенно несущественно, что наше многообразие является областью именно евклидова пространства, а не какого-нибудь другого. От метрики нам здесь требуется только одно — возможность определить близость точек.

Указанные причины побудили математиков сформулировать определения топологических объектов так, чтобы все «лишнее» было убрано и чтобы таким образом истинная природа тех или иных топологических свойств была максимально выделена, если угодно, обнажена. Соответствующая аксиоматика, однако, сильно теряет в наглядности и некоторые вполне привычные понятия и объекты в такой теоретико-множественной формулировке становятся неузнаваемыми. Мы будем пользоваться таким языком в самой минимальной мере, теряя в математической общности, но выигрывая в наглядности. Вместе с тем для связи с математической литературой в следующем параграфе мы приведем определения некоторых исходных топологических понятий на теоретико-множественном языке. Подчеркнем, что в данном случае этот язык не является «веерштрассовщиной», а действительно адекватен математической сущности вещей.

1.3. Многообразия (более общая формулировка)

В этом параграфе приводятся некоторые формальные теоретико-множественные определения. Читатель-физик, столкнувшись с определением топологического многообразия в математических монографиях, может не узнать в аксиоматических определениях формулы предыдущего параграфа. Для понимания текста лекций вполне достаточно мыслить топологические многообразия как множества, которые локально устроены как евклидовы пространства и склеены с надлежащей степенью гладкости.

1. Множества. Основные обозначения.

Запись $x \in M$ означает, что x является элементом множества M, а $x\overline{\in}M$ означает, что x не принадлежит множеству M. $M_1 \subset M_2$ — означает, что множество M_1 содержится в M_2 или совпадает с ним. Пустое множество обозначается $\varnothing$. Множество элементов x, обладающих свойством P, обозначается $\{\dot{x} \mid P\}$.

Обычным образом определяется объединение C двух множеств A и B (рис. 1) и пересечение (рис. 2).

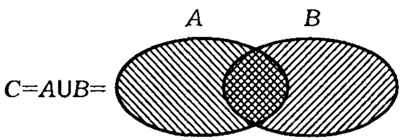

Рис. 1. Объединение множеств.

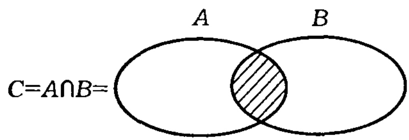

Рис. 2. Пересечение множеств.

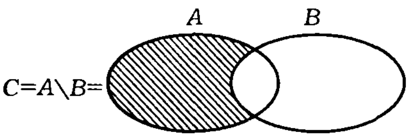

Рис. 3. Разность множеств.

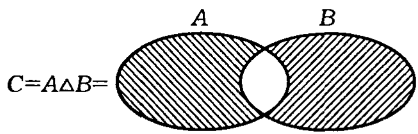

Рис. 4. Симметрическая разность множеств.

Можно рассмотреть объединение и пересечение для произвольного множества индексов I:

$$\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha \quad \bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha \tag{1.3.1}$$

Кроме того, полезно определить *разность* $A \setminus B$ множества A и B, т. е. множество:

$$C = A \setminus B = \{x \mid x \in A, x\overline{\in}B\}, \tag{1.3.2}$$

и симметричную разность

$$C = A \triangle B = \{x \mid x \in A \cup B, x\overline{\in}A \cap B\}.$$

Легко видеть, что $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

2. Топологические пространства.

Мы определим так называемые хаусдорфовы пространства с помощью системы *окрестностей*. Множество M называется *хаусдорфовым топологическим пространством*, если в нем выделены подмножества, называемые окрестностями, удовлетворяющие следующей системе аксиом:

Аксиома 1. Каждая точка $x \in M$ имеет по крайней мере одну окрестность U_x и содержится в каждой из своих окрестностей.

Аксиома 2. Если $U_x^{(1)}$ и $U_x^{(2)}$ — две окрестности x, то существует окрестность:

$$U_x^{(3)} \subset U_x^{(1)} \cap U_x^{(2)}. \tag{1.3.3}$$

Аксиома 3. Если $y \in U_x$, то существует окрестность U_y такая, что

$$U_y \subset U_x. \tag{1.3.4}$$

Аксиома 4. Хаусдорфова аксиома отделимости: для двух точек $x \neq y$ всегда найдутся две непересекающиеся окрестности $U_x \cap U_y = \varnothing$.

Легко доказать, что в евклидовом пространстве R^n множество шаров $\{x \mid (y_1 - x_1)^2 + \ldots + (y_n - x_n)^2 < r^2\}$ удовлетворяют всем четырем аксиомам и определяют в нем обычную топологию.

Точка $x \in M$ называется *предельной*, если всякая ее окрестность содержит по крайней мере одну точку из M, с ней не совпадающую.

Подмножество M_1 топологического пространства M называется *замкнутым*, если оно содержит все свои предельные точки. Подмножество M_2 дополнительное в M к замкнутому подмножеству M_1 ($M_2 = M \setminus M_1$) определяется как *открытое*.

Топологическое пространство называется *связным*, если его нельзя представить как объединение двух замкнутых, непересекающихся подмножеств.

Отображение f топологического пространства M в топологическое пространство N называется непрерывным в точке x, если для всякой окрестности $U_{f(x)} \subset N$ существует окрестность $V_x \subset M$, такая, что $f(V) \subset U_{f(x)}$. Отображение M в N будет непрерывным, если оно непрерывно в каждой точке $x \in M$.

Два топологических пространства M и N называются *гомеоморфными* или топологически эквивалентными, если существует взаимнооднозначное соответствие и взаимнонепрерывное отображение $f\colon M \to N$.

Топология изучает свойства множеств с точностью до гомеоморфизма. Например, сфера S и куб топологически эквивалентны. Можно увидеть, что топологически эквивалентны сфера S^2 и риманова поверхность функции z^2, круговое кольцо и цилиндр.

3. Многообразия.

Хаусдорфово топологическое пространство называется *многообразием*, если для всякой точки $x \in M$ существует окрестность, гомеоморфная шару в евклидовом пространстве R^n. Гомеоморфность окрестности шару означает, что топологическое многообразие устроено локально так же, как евклидово пространство и поэтому, в частности, имеет определенную размерность.

Окрестность U вместе с указанным гомеоморфизмом называется *картой* множества U. Если $x \in U$, то $\varphi(x) \in R^n$ — локальные координаты точки x.

Если накладываются условия гладкости на многообразие, то необходимо, чтобы любые две карты (U, φ) и (V, ψ), для которых $U \cap V \neq \varnothing$, были надлежащим образом склеены. Многообразие будет принадлежать классу C^∞ или будет аналитическим, если отображения из R^n в R^n: $\varphi_0\psi^{-1}$ и $\psi_0\varphi^{-1}$ будут бесконечно дифференцируемы или аналитичны (рис. 5).

В этих же терминах определяется *многообразие с краем*. Это многообразие M, у которого существуют такие точки x, что в локальных координатах карты (U, φ) $\varphi(x) = 0$ и $\varphi(U \cap M)$ имеет вид полупространства в R^n: $x_1 \geqslant 0$.

Можно показать, что многообразия, определенные в предыдущем параграфе системой уравнений и неравенств в R^n, являются многообразиями в инвариантной формулировке.

Приведем примеры.

Пример 1. *Окружность S^1: $X_1^2 + X_2^2 = 1$. Четыре полукружности $U_i^+=\{x \in S_1^1 \mid x_i > 0\}$, $U_i^- = \{x \in S^1 \mid x_i < 0\}$ являются картами, покрывающими S^1. В качестве локальных координат на $U_i^\pm$ берется проекция на ось x_j $(i \neq j)$. Легко видеть, что это аналитическое многообразие. Эта конструкция обобщается на сферу произвольной размерности S^n.*

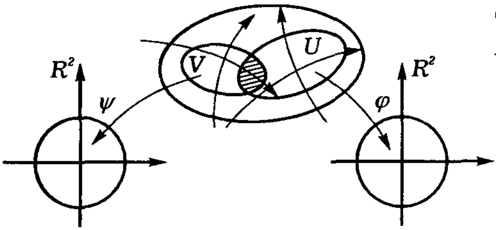

Рис. 5. Пересечение двух карт.

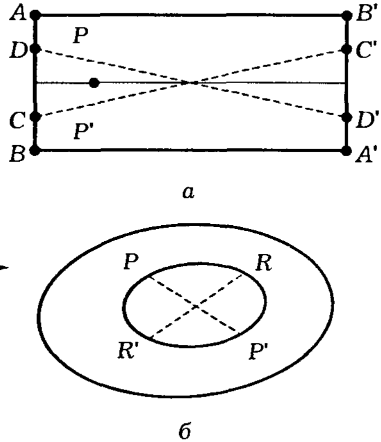

Рис. 6. Лист Мёбиуса.

Пример 2. *Унитарная группа $U(n)$ как многообразие. Множество унитарных матриц можно рассматривать как поверхность в евклидовом пространстве R^d, где $d{=}n^2$, заданную уравнением $U^+{=}U^{-1}(u \in U(n))$. Таким образом, $U(n)$ является многообразием согласно определениям предыдущего параграфа. Можно, разумеется, ввести локальные координаты на $U(n)$ и доказать, что $U(n)$ аналитическое многообразие. Одна карта для группы $SU(2)$ хорошо известна — это углы Эйлера. Это действительно локальные координаты, так как они параметризуют группу, из которой выброшено многообразие меньшей размерности.*

Пусть M_1 и M_2 — два многообразия. Рассмотрим множество пар $M = \{(x_1, x_2) \mid x_i \in M, i = 1, 2\}$. Множество M наделяется структурой многообразия, если задать в нем карты вида:

$$(U_i \times V_j, \varphi_i \times \psi_j),$$

где (U_i, φ_i) — карты в M_1, а (V_j, ψ_j) — карты в M_2. Многообразие M называется *произведением* многообразий M_1 и M_2 (обозначение $M = M_1 \times M_2$).

Примеры: *Тор* $= S^1 \times S^1$; *цилиндр* $= R^1 \times S^1$, $R^{(n+m)} = R^n \times R^m$.

Важным понятием является ориентация многообразия. Широкий класс топологических многообразий допускает ориентацию в целом (такие многообразия называются *ориентируемыми или двусторонними)*, причем *ориентируемость является топологически инвариантным свойством*. Ориентируемы, в частности, многообразия, гомеоморфные шару при любом числе измерений (двухмерный шар — это круг, одномерный — отрезок). Таким образом, окрестность любой точки или вообще всякая часть многообразия, гомеоморфная шару, ориентируема. Ориентировать окрестность — значит задать на ней систему координат. Две системы координат по определению соответствуют двум *противоположным ориентациям*, если *якобиан преобразования* от одной системы к другой *отрицателен*. Если две окрестности пересекаются, то мы можем считать их ориентированными одинаково или противоположно в зависимости от того, как ориентировано пересечение в каждой из этих пересекающихся окрестностей[3]. *Ориентируемое многообразие* может быть *покрыто системой пересекающихся окрестностей, ориентированных одинаково*. Если этого *нельзя сделать*, то многообразие является *неориентируемым (односторонним)*. Хорошо известным примером *ограниченной неориентируемой* поверхности является *лист Мёбиуса*. Он гомеоморфен прямоугольнику, точки двух сторон которого отождествлены так, как показано на рис. 6а. Можно показать также, что лист Мёбиуса гомеоморфен круговому кольцу, у которого диаметрально противоположные точки внутренней окружности отождествлены (рис. 6б)[4].

На рис. 7 показана неориентируемость листа Мёбиуса. Если замкнутую кривую CC' покрыть окрестностями, причем так, что начиная от окрестности точки C каждая последующая окрестность будет ориентирована одинаково с предыдущей, то окрестности точек C и C' окажутся ориентированы противоположным образом: вертикальный орт в точке C' поворачивается на 180° (на реальном листе Мёбиуса, вложен-

---

[3] Мы говорим об относительной ориентации пересекающихся окрестностей, так как в этом случае ориентации окрестностей заведомо можно сравнить по ориентации их общей части (пересечения).

[4] Для установления этого гомеоморфизма надо разрезать прямоугольник 6, а по линии PR, развернуть полученные части так, чтобы можно было склеить точки A и A', B и B', C и C' и т. д., а затем произвести отождествление точек P и P', R и R' и т. д.

ном в трехмерное пространство, поворот вертикального орта вокруг горизонтального происходит с выходом из плоскости чертежа непрерывно, и угол поворота достигает 180° при возвращении в исходную точку с другой стороны ленты, склеенной в лист Мёбиуса согласно идентификации точек по схеме рис. 6а.

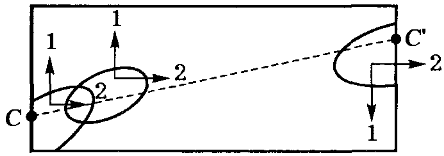

Рис. 7. Неориентируемость листа Мёбиуса.

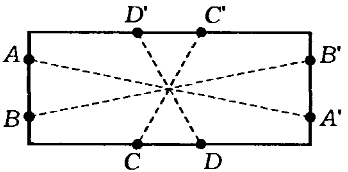

Рис. 8. Проективная плоскость.

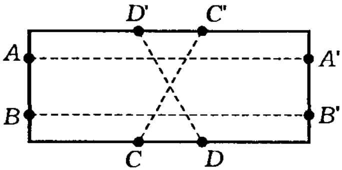

Рис. 9. Бутылка Клейна.

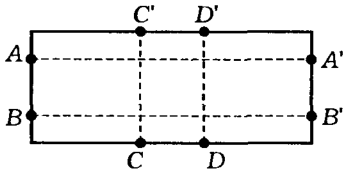

Рис. 10. Тор.

Примерами *замкнутых неориентируемых* поверхностей могут служить *проективная плоскость* (рис. 8) и *бутылка Клейна* (рис. 9).

Отметим, что проективная плоскость гомеомофорна сфере с дыркой, в которую вклеен лист Мёбиуса, а бутылка Клейна — сфере с двумя дырками с вклеенными листами Мёбиуса. Эти гомеоморфизмы можно установить, если воспользоваться реализацией листа Мёбиуса в форме рис. 6б, а остальных поверхностей — в представлениях рис. 8–10.

Можно показать, что все *замкнутые ориентируемые* поверхности гомеоморфны *сфере с некоторым числом «ручек»* (другая терминология — «кренделю» с некоторым числом дырок), а *все замкнутые не-*

ориентируемые поверхности — сфере с некоторым числом вклеенных листов Мёбиуса[5].

В частности, все замкнутые римановы поверхности аналитических функций одной независимой переменной гомеомофорны каким-либо из перечисленных эталонных поверхностей. Так, римановы поверхности алгебраических функций гомеомофорны кренделям[6]. Например, двулистная риманова поверхность функции:

$$f(z) = [P_{2n}(z)]^{1/2}, \tag{1.3.5}$$

где $P_{2n}(z)$ — полином степени $2n$, гомеоморфна кренделю с $n-1$ дырами. В этом можно убедиться, основываясь на следующих соображениях. Каждый из листов гомеоморфен сфере с n разрезами, которые можно считать расположенными на экваторе, полагая, что каждый разрез соединяет две точки ветвления и разрезы не пересекаются. Склеивание листов произведем так, чтобы одна из сфер находилась внутри другой. После этого произведем еще одно преобразование: отразим точки внутренней сферы относительно экваториальной плоскости, оставляя при

[5]В дальнейшем крендель с n дырками обозначается через P_n, а сфера с n листами Мёбиуса — через N_n. Обычную двумерную сферу P_0 мы будем обозначать символом S^2. Заметим, что вклеивание листов Мёбиуса в P_n не дает поверхностей, топологически отличных от N_n. Вклеивание n_2 листов Мёбиуса в P_{n_1} дает поверхность N_{n_3} с $n_3 = 2n_1 + n_2$. Доказательство сформулированной в тексте теоремы сложно и здесь рассматриваться не будет. Поверхности N_n самопересекающиеся. Реализация N_2 в виде самопересекающейся поверхности общеизвестна. Укажем на реализацию в виде такой поверхности с самопересечением проективной плоскости N_1. Ей гомеоморфна поверхность, удовлетворяющая уравнению:

$$(ax_1^2 + bx_2^2)(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - 2z(x_1^2 + x_2^2) = 0.$$

Линией самопересечения у этой поверхности является отрезок прямой. Обратим внимание на то, что матрица $\partial F_i/\partial x_j$ в данном случае имеет особенность на многообразии, а именно $\partial F/\partial x_1 = \partial F/\partial x_2 = \partial F/\partial x_3 = 0$ вдоль линии самопересечения.

[6]Напомним, что алгебраическая функция $u = f(z)$ задается уравнением:

$$u^m + R_1(z) \cdot u^{m-1} + \cdots + R_m(z) = 0,$$

где $R_k(z)$ — рациональные функции от z. Так как при $m > 4$ уравнение для u, вообще говоря, неразрешимо в радикалах, то алгебраическая функция и в общем случае не выражается через элементарные. Главные же свойства алгебраической функции в том, что она имеет конечное число особых точек — полюсов или ветвлений, причем все ветвления — конечного порядка (корневые).

этом края разрезов, расположенных на экваторе, на месте. Это преобразование является «$(n-1)$-кренделем».

1.4. Учебная литература

Прокомментируем предложенный список литературы.

Книги [1–4] наиболее просты и предназначены для первоначального ознакомления с предметом. Однако они содержат мало материала: при этом работа [4] так же, как и более серьезные руководства [5–9], рассчитаны на читателя–физика. Наибольшее пересечение с предлагаемым курсом имеет работа [6]. В работах [10–13] содержатся необходимые предварительные сведения по теоретико–множественной топологии, теории групп и теории многообразий. Отметим, однако, что эти сведения в необходимом объеме содержатся и в серьезных руководствах по алгебраической топологии, например, в работах [14] и [15]. Это наиболее полные руководства по изучаемому предмету. К этим двум монографиям следует добавить работы [16–19]. Впрочем последняя книга есть только первая часть задуманного курса. Много информации о поверхностях размерности 2 можно найти в работе [20]. Также много конкретной информации содержится в первоначальной работе Пуанкаре и ее дополнениях [21]. Книги [22–25] содержат сведения по теории Морса, а работы [13] и [25] — о векторных полях и многообразиях. Проблемы, связанные с теорией функций комплексного переменного, освещаются в работах [7], [20], [26], [27].