

ГЛАВА 2

Теория гомологий

1. Клеточный комплекс. 2. Группы циклов и группы гомологий (группы Бетти). 3. Числа Бетти и характеристика кручений. 4. Гомологи и числа Бетти по модулю. 5. Многообразия с краем. Относительные гомологии. 6. Последовательности Майера — Вьеториса и теорема сложения для чисел Бетти. 7. Когомологии.

2.1. Клеточный комплекс

Для выяснения топологических характеристик многообразия следует разбить его по возможности на простые составляющие. Мы изучим так называемое *клеточное разбиение* многообразия. *Клеткой* называется часть многообразия, гомеоморфная открытому шару $B^d = \{x \in R^d \mid \sum_{j=1}^{\alpha} x_j < 1\}$. При разбиении возникают клетки различного числа измерений от нуля (точка) до размерности многообразия.

Клеточное разбиение позволяет построить некоторую алгебраическую структуру — *клеточный комплекс*. Можно выделить такие алгебраические характеристики комплекса, которые не зависят от разбиения и сохраняются для топологически эквивалентных пространств. В этом и состоит предмет алгебраической топологии — изучение алгебраических инвариантов («квантовых чисел») топологических пространств.

Дадим определение клеточного разбиения. Клеточным разбиением многообразия M называется конечное семейство \mathcal{E} его клеток ($\mathcal{E} = \{a\}$), удовлетворяющее условиям:

1) $M = \bigcup_{a \in \mathcal{E}} a$, т. е. клетки составляют покрытие M , причем попарно не пересекаются ($a' \cap a = \emptyset$, если $a \neq a'$).

2) Для каждой клетки $a \in \mathcal{E}$ существует гомеоморфизм ϕ_a шара B^d в a (см. определение клетки), который продолжается до непрерывного

отображения φ_a границ шара — сферы S^{d-1} — на множество клеток меньшей размерности, примыкающих к a . Отображение φ_a не обязано быть гомеоморфизмом, что будет видно из примеров. Отметим еще, что число d определяют размерность клетки a .

Имея клеточное разбиение, можно приступить к построению клеточного комплекса. Для этого необходимо ввести понятия *группы цепей* и *оператора границы*.

Пусть $\{a_i^d\}$ — совокупность всех клеток многообразия данной размерности d . Согласно предположениям, их число конечно ($i = 1, \dots, n_d$). Рассмотрим формальные линейные комбинации с целыми коэффициентами:

$$l^d(a) = \sum_{i=1}^{n^d} \alpha_i a_i^d \quad \alpha_i \in Z. \quad (2.1.1)$$

Выражение такого вида называется *цепью* размерности d многообразия M . Считается, что $l = 0$, когда $\alpha_i = 0$. Для цепей можно ввести операцию сложения. Суммой цепей

$$l_1 = \sum_{i=1}^n \alpha_i^1 a_i \quad \text{и} \quad l_2 = \sum_{i=1}^m \alpha_i^2 a_i \quad (2.1.2)$$

называется *цепь*

$$l_1 + l_2 = \sum_{i=1}^n (\alpha_i^1 + \alpha_i^2) a_i. \quad (2.1.3)$$

Цепи данной размерности относительно операции сложения образуют аддитивную абелеву группу — группу цепей L .

Введение цепей целесообразно, потому что кратные многообразия (αa) имеют геометрический смысл. К кратным многообразиям приводят функциональные зависимости. Например, пройдя окружность в комплексной плоскости z , мы совершим двойной оборот по окружности в плоскости z^2 . В топологии с функциональными зависимостями такого типа мы встречаемся при непрерывных отображениях разных многообразий друг в друга¹. Известно, например, что проективная плоскость гомеоморфна полусфере, причем бесконечно удаленной прямой

¹Напомним, что с логической точки зрения функциональная зависимость есть

отвечает граничная окружность (экватор) с отождествленными диаметрально противоположными точками. Таким образом, каждой бесконечно удаленной («несобственной») точке отвечают две диаметрально противоположные точки экватора, а каждым двум таким точкам экватора — одна несобственная точка. Поэтому полный оборот по экватору дает двойной оборот по бесконечно удаленной прямой (напомним, что на проективной плоскости каждая прямая — замкнутая линия). Этот пример показывает, что кратное многообразие может быть отображено в обычное. Один из общих способов отыскания «обычного» многообразия, гомеоморфного кратному многообразию αa , сводится в принципе к следующему: введем некоторую непрерывную — α -значную функцию точки на многообразии a ; тогда многообразие, на котором эта функция однозначна, будет гомеоморфно αa . Здесь явно просматривается связь с римановыми поверхностями аналитических функций.

Перейдем к построению оператора границы. Оператор границы Δ — это линейный оператор, который действует из группы цепей L^d размерности d в группу цепей L^{d-1} размерности $d-1$

$$\Delta: L^d \rightarrow L^{d-1}. \quad (2.1.4)$$

В силу линейности его достаточно определить на клетках. Границей d -мерной клетки a называется образ сферы S^{d-1} при отображении φ_a (см. п. 2 определения комплекса). Оператор Δ ставит в соответствие клетке a совокупность клеток размерности $d-1$, принадлежащих границе a . Уточним это соответствие. Ориентируем некоторым образом сферу S^{d-1} . При отображении φ_a сфера S^{d-1} переходит в границу клетки a . При этом клетка b , принадлежащая границе, может иметь несколько прообразов на сфере S^{d-1} ². Тогда матричный элемент Δ_b^a оператора Δ есть целое число, равное числу прообразов клетки b в S^{d-1} с учетом их ориентации. Число Δ_b^a называется *коэффициентом инцидентности*³.

частный случай отображения: точки многообразия, на котором задана функция, отображаются в точки комплексной плоскости. В общем случае мы можем говорить о функциях со значениями не из комплексной плоскости, а из других многообразий («значением» функции будет тогда точка этого другого многообразия).

² Отображение φ_a не является гомеоморфизмом, а только непрерывно!

³ В дальнейшем мы определим понятие степени отображения (см. 3.4), которое совпадает с коэффициентом инцидентности.

Если b не принадлежит границе a , то будем считать, что $\Delta_b^a = 0$. Таким образом

$$\Delta a = \sum_b \Delta_b^a b. \quad (2.1.5)$$

Эта формула позволяет определить оператор Δ для цепи любой размерности.

Из определения оператора Δ следует его фундаментальное свойство:

$$\Delta^2 = 0. \quad (2.1.6)$$

Его достаточно проверить для одной клетки, т. е. что выполняется равенство (см. (2.1.5)):

$$\sum_b \Delta_b^a \Delta_c^b = 0. \quad (2.1.7)$$

Для доказательства заметим, что данная клетка с размерности $d - 2$ в границу различных клеток b , составляющих границу клетки a , входит с противоположными ориентациями. Интуитивно ясно, что граница клетки сама по себе не имеет границы. В этом заключается смысл равенства (2.1.7). Теперь можно определить клеточный комплекс многообразия M . *Клеточным комплексом* называется совокупность групп цепей $L^d = 0, \dots, n$ ($n = \dim M$) и оператора границы Δ :

$$L^n \xrightarrow{\Delta} L^{n-1} \xrightarrow{\Delta} \dots \xrightarrow{\Delta} L^0, \quad (2.1.8)$$

при этом существенно выполнение свойства $\Delta^2 = 0$.

Цепи, границы которых равны нулю, называются циклами.

Поясним, каким образом алгебраическая граница дает возможность выявлять топологические свойства многообразия. Схемы отождествления сторон прямоугольников на рис. 8 и 10 отвечают одноклеточным разбиениям проективной плоскости и тора (рис. 11 и 14). Отличие тора от проективной плоскости в схеме отождествления проявляется в том, что алгебраическая граница двумерной клетки на рис. 11 равна нулю, тогда как алгебраическая граница двумерной клетки на

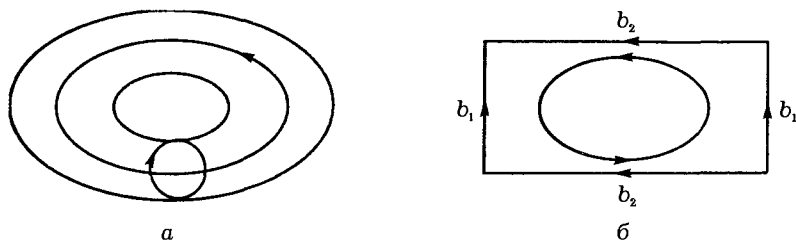


Рис. 11. Каноническое разбиение тора.

рис. 14 равна окружности или, другими словами, удвоенной бесконечно удаленной прямой.

Рассмотрим теперь разбиение некоторых многообразий, цепи, отвечающие этим разбиениям, и границы цепей.

1. Двумерная сфера (S^2). Простейшее разбиение — отметить одну точку. Полученное разбиение содержит одну нульмерную и одну двумерную клетки, причем последняя гомеоморфна внутренности круга бесконечного радиуса. В соответствии с этим нульмерные (l_0), одномерные (l_1) и двумерные (l_2) цепи имеют вид:

$$l_0(S^2) = \alpha a, \quad l_1(S^2) = 0, \quad l_2(S^2) = \gamma g. \quad (2.1.9)$$

Все цепи являются циклами, т. е.

$$\Delta l_0(S^2) = 0, \quad \Delta l_1(S^2) = 0, \quad \Delta l_2(S^2) = 0. \quad (2.1.10)$$

Первые два равенства очевидны. Третье же равенство имеет место, потому что отличной от нуля границей двумерной клетки может быть только одномерная; в данном случае одномерных клеток вообще нет.

2. Двумерный тор (P_1). Каноническое разбиение тора состоит из параллели и меридиана (рис. 11а). Нульмерной клеткой является их пересечение. Это разбиение «разрезает» тор в прямоугольник (рис. 11б) — единственную двумерную клетку. В соответствии со сказанным группы цепей имеют вид:

$$l_0(P_1) = \alpha a; \quad l_1(P_1) = \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2, \quad l_2(P_1) = \gamma g. \quad (2.1.11)$$

Рассмотрим границы цепей. Легко установить, что

$$\Delta l_0(P_1) = 0; \quad \Delta l_1(P_1) = 0; \quad \Delta l_2(P_1) = 0. \quad (2.1.12)$$

Первые два равенства очевидны (границы точки — нуль, одномерные клетки — замкнутые линии). Последнее же из равенств (2.1.12) следует из того, что при любой ориентации контура клетки g противоположные стороны прямоугольника на рис. 11б могут входить в Δg только с разными знаками (относительные ориентации противоположных сторон определяются схемой отождествления точек на рис. 10). Поэтому

$$\Delta l_2(P_1) = \gamma \Delta g = \gamma(b_2 - b_1 - b_2 + b_1) = 0. \quad (2.1.13)$$

Таким образом, все цепи канонического разбиения тора являются циклами.

3. Двумерный n -крендель (P_n). Рассмотрим вначале случай $n = 2$. Такой крендель может быть получен склеиванием двух торов с отверстиями O и O' («ручек») по периметру этих отверстий (рис. 12а).

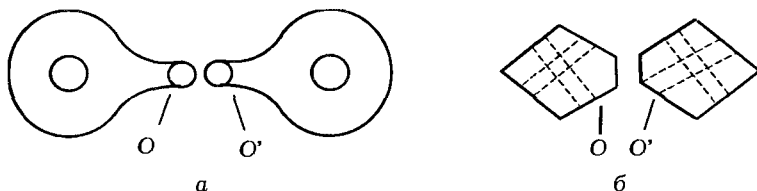


Рис. 12. Крендель P_2 .

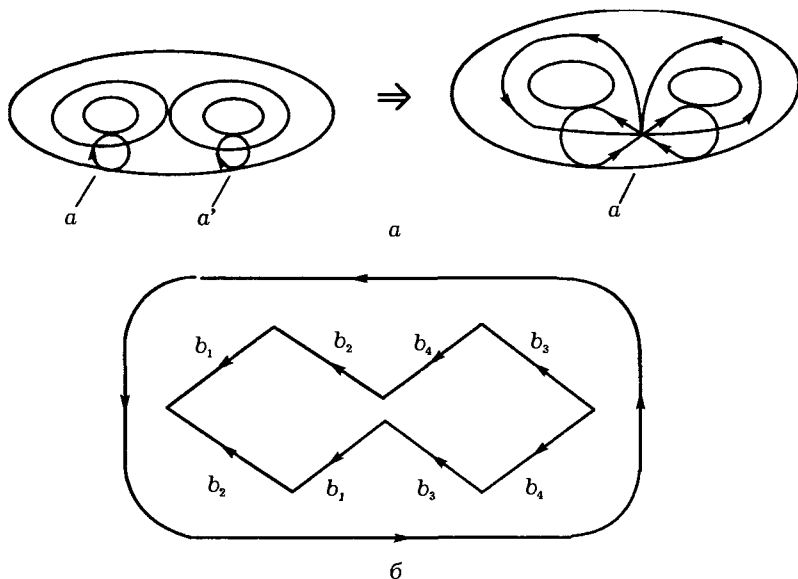
На рис. 12б приведена гомеоморфная кренделю P_2 плоская фигура (пунктирные линии указывают схему идентификации точек противоположных сторон). На рис. 13а воспроизведено каноническое разбиение кренделя, аналогичное каноническому разбиению тора (одна нульмерная клетка и одна двумерная). Число одномерных клеток в этом случае равно четырем. Это же разбиение с ориентацией клеток показано на рис. 13б.

В соответствии с изложенным, имеем следующие группы цепей:

$$l_0(P_2) = \alpha a; \quad l_1(P_2) = \sum_1^4 \beta_i b_i; \quad l_2(P_2) = \gamma g. \quad (2.1.14)$$

Так же, как и в случае тора P_1 , легко устанавливается, что все цепи являются циклами:

$$\Delta l_0(P_2) = \Delta l_1(P_2) = \Delta l_2(P_2) = 0. \quad (2.1.15)$$

Рис. 13. Разбиение 2-крюделя P_2 .

Аналогичным образом получается и разбиение n -крюделя (P_n), содержащее одну нульмерную клетку, одну двумерную и $2n$ одномерных:

$$l_0(P_n) = \alpha a; \quad l_1(P_n) = \sum_1^{2n} \beta_i b_i; \quad l_2(P_2) = \gamma g. \quad (2.1.16)$$

При этом все цепи опять являются циклами:

$$\Delta l_0(P_n) = \Delta l_1(P_n) = \Delta l_2(P_n) = 0. \quad (2.1.17)$$

4. Проективная плоскость (N_1). Рассмотрим два разбиения.

а) Простейшее разбиение опирается на гомеоморфизм проективной плоскости кругу, у которого диаметрально противоположные точки граничной окружности отождествлены (рис. 8). Разбиение с наименьшим числом клеток показано на рис. 14. Оно состоит из одной вершины (нульмерной клетки), одной замкнутой линии — бесконечно удаленной прямой и одной двумерной клетки.

Соответственно все три группы цепей имеет вид:

$$l_0(N_1) = \alpha a; \quad l_1(N_1) = \beta b; \quad l_2(N_1) = \gamma g. \quad (2.1.18)$$

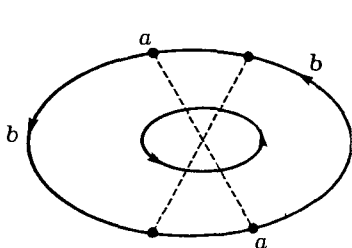


Рис. 14. Разбиение проективной плоскости (N_1) (одноклеточное).

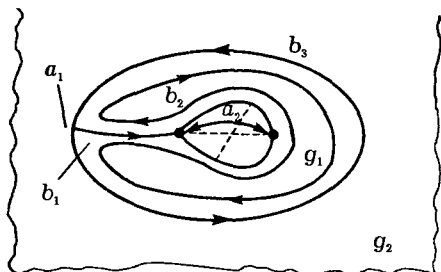


Рис. 15. Разбиение (N_1) (две двумерные клетки).

Нульмерная и одномерная цепи являются, очевидно, циклами. Граница же двумерной цепи не равна нулю:

$$\Delta l_2(N_1) = \gamma \Delta g = \gamma 2b = 2\gamma b. \quad (2.1.19)$$

Подчеркнем, что граница Δg двумерной клетки g равна $2b$, а не b , так как при обходе контура в направлении тонкой стрелки замкнутая линия b (бесконечно удаленная прямая) проходит дважды.

б) Исходя из гомеоморфизма проективной плоскости сфере с вклеенным листом Мёбиуса, можно указать другое разбиение проективной плоскости. Оно показано на рис. 15. Разбиение содержит две нульмерные (a_1, a_2) , три одномерные (b_1, b_2, b_3) и две двумерные (g_1, g_2) клетки. Одна из них (g_1) есть одноклеточное разбиение листа Мёбиуса, другая (g_2) — то, что остается после «вырезания» листа Мёбиуса, т. е. гомеоморфная кругу (сфера с дыркой). Группы цепей имеют вид:

$$\begin{aligned} l_0(N_1) &= \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2; \\ l_1(N_1) &= \sum_1^3 \beta_i b_i; \\ l_2(N_1) &= \gamma_1 g_1 + \gamma_2 g_2. \end{aligned} \quad (2.1.20)$$

Далее для границ имеем:

$$\begin{aligned} \Delta l_0(N_1) &= 0; & \Delta l_1(N_1) &= \beta_1(a_2 - a_1); \\ \Delta l_2(N_1) &= \gamma_1(2b_2 - b_3) - \gamma_2 b_3 = 2\gamma_1 b_2 - (\gamma_1 + \gamma_2)b_3. \end{aligned} \quad (2.1.21)$$

Таким образом, в данном разбиении циклом является только нульмерная цепь. Одномерная группа цепей l_1 имеет подгруппу циклов, выделяемую условием $\beta_1 = 0$.

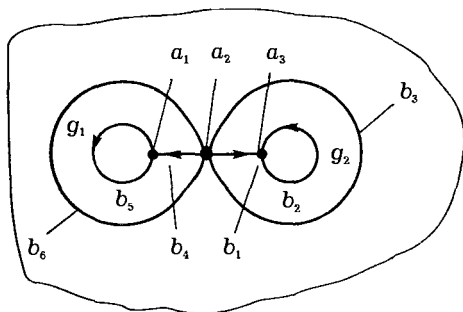


Рис. 16. Разбиение бутылки Клейна (N_2).

5. Бутылка Клейна (N_2). Эта поверхность, как упоминалось выше, гомеоморфна сфере с двумя вклеенными листами Мёбиуса. Соответственно этому разбиение N_2 имеет вид, показанный на рис. 16. Оно разбивает N_2 на три двумерные клетки: на две клетки, получающиеся из двух листов Мёбиуса, и на одну сферу с дыркой. Кроме того, имеется три нульмерных и шесть одномерных клеток. Группы цепей определяются поэтому формулами:

$$\begin{aligned} l_0(N_2) &= \sum_1^3 \alpha_i a_i, \\ l_1(N_2) &= \sum_1^6 \beta_i b_i, \\ l_2(N_2) &= \sum_1^3 \gamma_i g_i. \end{aligned} \quad (2.1.22)$$

Нульмерные цепи являются циклами. Кривые b_2, b_3, b_5, b_6 — также циклы, и потому граница одномерной цепи

$$\Delta l_1(N_2) = \beta_1 \Delta b_1 + \beta_2 \Delta b_4.$$

Так как

$$\Delta b_1 = a_3 - a_2; \quad \Delta b_4 = a_1 - a_2,$$

то

$$\Delta l_1(N_2) = -(\beta_1 + \beta_4)a_2 + \beta_4 a_1 + \beta_1 a_3. \quad (2.1.23)$$

Таким образом, цепи $\beta_1 = \beta_4 = 0$ являются циклами. Далее имеем

$$\Delta l_2(N_2) = 2\gamma_1 b_5 - (\gamma_1 + \gamma_3)b_6 + 2\gamma_2 b_2 - (\gamma_2 + \gamma_3)b_3. \quad (2.1.24)$$

Возможно также разбиение, аналогичное п. 4а. Оно показано на рис. 17. Для этого разбиения имеют место группы цепей:

$$l_0(N_2) = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2; \quad b_1(N_2) = \sum_1^3 \beta_i b_i; \quad l_2(N_2) = \gamma g. \quad (2.1.25)$$

Соответственно для границ можно написать

$$\Delta l_0(N_2) = 0; \quad \Delta l_1(N_2) = \beta_3(a_1 - a_3); \quad \Delta l_2(N_2) = 2\gamma(b_1 + b_2). \quad (2.1.26)$$

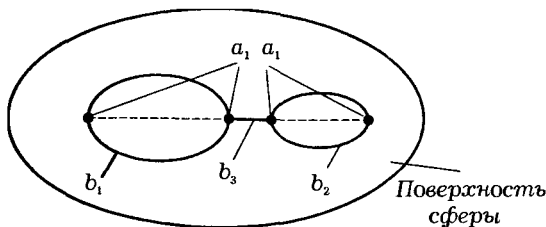


Рис. 17. Разбиение (N_2) с одной двумерной клеткой.