2.2. Группы циклов и группы гомологий (группы Бетти)

Ясно, что совокупность цепей-циклов сама является группой, т. е. образует подгруппу группы цепей. Она называется группой циклов и в дальнейшем обозначается символом $C_2(\mathrm{M})$, где M — обозначение многообразия, r-размерность циклов. В этой группе имеется подгруппа циклов $B_i(\mathrm{M})$ являющихся границами $(r+1)$-мерных клеток. *Цикл, являющийся границей, называется гомологичным нулю.* Это записывается так

$$C_r \sim 0.$$

Легко почувствовать, что выделение гомологичных нулю циклов из всех прочих разумно, поскольку топологически неэквивалентные поверхности отличаются как раз количеством негомологичных нулю циклов. Например, на сфере всякий одномерный цикл ограничивает, т. е. гомологичен нулю, а на торе имеются два типа неограничивающих (негомологичных нулю) циклов — мередиан и параллель (см. рис. 1). Зато любые три цикла, как бы они ни были выбраны, обязательно ограничивают. Аналогичным образом на 2 кренделе имеются четыре типа циклов неограничивающих, но любые пять — ограничивают. Соответственно, на n-кренделе имеются $2n$ типов неограничивающих циклов, но любые $2n+1$ — ограничивают. Говорят, что *«порядок связности» h n-кренделя (P_n) равен $2n+1$:*

$$h(P_n) = 2n+1. \tag{2.2.1}$$

Таким образом, *порядок связности* любой *замкнутой ориентируемой поверхности нечетен.*

В отличие от этого порядок *связности замкнутых неориентируемых поверхностей может быть как четным, так и нечетным.* На проективной плоскости (N_1) имеется один тип неограничивающих циклов, т. е. тех, которые начинаются и оканчиваются в бесконечно–удаленных точках или на окружности с отождествленными диаметрально–противоположными точками (рис. 14, 15). Вместе с тем любые два цикла ограничивают. Поэтому порядок связности N_1 равен 2. Поскольку любая неориентируемая поверхность (N_n) гомеоморфно сфере с n дырками, заклеенными листами Мёбиуса, имеем

$$h(N_n) = n + 1. \tag{2.2.2}$$

Порядок связности — исторически первый количественный топологический иваринт поверхности был введен впервые *Риманом. Порядок связности Римана* h однозначно выражается через *эйлерову характеристику многообразия* χ. Поскольку имеет место соотношение

$$\chi = 3 - h. \tag{2.2.3}$$

Напомним, что эйлерова характеристика χ определяется числом K_0 нульмерных («вершин»), K_1 одномерных («ребер») и K_2 двумерных («граней») клеток какого-либо разбиения многообразия по формуле

$$\chi = K_0 - K_1 + K_2. \tag{2.2.4}$$

Эйлерова характеристика не зависит от разбиения и является топологическим инвариантом; это ясно из формулы (2.2.3), но, кроме того, может быть установлено и непосредственно на основе чисто геометрических соображений. Исходя из рассмотренных в разделе 2.1 разбиений, получаем, в частности, что для поверхностей, гомеоморфных сфере, $\chi(S^2) = 2$, для тора $\chi(P_1) = 0$, а для кренделей более высокого порядка $\chi(P_n) < 0$. Аналогично для проективной плоскости $\chi(N_1) = 1$, для бутылки Клейна $\chi(N_2) = 0$, а для остальных замкнутых неориентируемых поверхностей $\chi(N_n) < 0$. Отметим, что для n-мерных многообразий эйлерова характеристика дается выражением (Пуанкаре, 1895):

$$\chi = \sum_{r=1}^{n} (-1)^r K_r. \tag{2.2.5}$$

Здесь K_r — число r-мерных клеток.

Для поверхностей, гомеморфных сфере S^n, имеет место равенство:

$$\chi(S^n) = 1 + (-1)^n.$$

Отсюда, в частности, при $n = 2$ получается $\chi(S^2) = 2$.

Из сказанного видно, что рассмотрение негомологичных нулю циклов приводит к такому топологическому инварианту, как эйлерова характеристика, или к равноценной величине — порядку связности. Вместе с тем легко усмотреть, что только одной велечины χ (или h) недостаточно для описания топологического многообразия, поскольку негомеоморфные друг другу многообразия могут иметь одинаковые χ, например, тор и бутылка Клейна. Стремление получить более полный набор количественных характеристик топологических свойств многообразий приводит к необходимости рассмотреть структуру групп циклов $C_r(\mathrm{M})$.[4]

Очевидный способ изучения структуры группы состоит в разложении ее в прямую сумму некоторых подмножеств — смежных классов по одной из подгрупп. В случае некоммутативных групп предпочтительно разложение по смежным классам нормального делителя. В абелевой (аддитивной) группе, каковой является всякая группа цепей, любая подгруппа является нормальным делителем, в частности, и подгруппа гомологичных нулю циклов B_r группы циклов C_r. Если $C_r^{(i)} \in C^2$ и $B_r \in B_r \subset C_r$ — любые элементы соответственно C_r и B_r, то смежный класс

$$C_r^{(i)} + B_r \equiv \{c_r^{(i)} + b_r\} \tag{2.2.6}$$

есть по определению совокупность всех элементов, указанных в фигурных скобках ($C_r^{(i)}$ — фиксировано, b_r — пробегает всю подгруппу B_r).

[4]Это нужно прежде всего для того, чтобы выделять классы негомологичных нулю циклов с помощью некоторого алгоритма, а не указанием их словесной характеристики, например, «меридиан», «параллель» и т. п., что не всегда возможно сделать вполне определенным образом (зависит от реализации поверхности), и уж во всяком случае неудобно для приложений к функциональному анализу. Мы могли бы относить циклы к одному классу, если они переводятся друг в друга непрерывным преобразованием на данной поверхности (если они, как говорят, гомотопны друг другу). Но, приняв классификацию по этому признаку, мы замечаем, что и гомологичные нулю циклы не все гомотопны друг другу; одни, например, могут быть стянуты в точку (гомотопны нулю), другие, например, цикл, охватывающий «перешеек» между двумя дырами кренделя, нет. Но тогда гомологичность или негомологичность цикла нулю отходит на второй план, а на первый выдвигается вообще перечисление негомотопных классов циклов. Такой подход составляет содержание *теории гомотопий.* Теория гомотопий и теория *гомологий* — два возможных способа алгебраического выявления топологических свойств, каждый из которых, по-видимому, является полным сам по себе, по крайней мере в отношении ряда многообразий. В тех или иных прикладных задачах эти два подхода могут оказаться удобными в разной мере аналогично тому, например, как в теории представлений можно использовать инфинитезимальный подход или интегральные методы.

Два смежных класса $C_r^{(i)} + B_r$ и $C_r^{(j)} + B_r$ совпадают тогда и только тогда, когда

$$C_r^{(i)} - C_r^{(j)} \in B_r. \tag{2.2.7}$$

Два различных смежных класса не имеют общих элементов. Поэтому C_r может быть разложена в прямую сумму смежных классов $C_r^{(i)} + B_r$. Совокупность смежных классов образует группу. Именно суммой двух смежных классов $C_r^{(i)} + B_r$ и $C_r^{(j)} + B_r$ является множество всех элементов:

$$\{C_r^{(i)} + b_2 + C_r^{(j)} + b'_r\} \equiv C_r^{(i)} + B_r + C_2^{(j)} + B_2,$$

которое само является смежным классом:

$$(C_r^{(i)} + C_r^{(j)}) + B_r.$$

Эта группа смежных классов называется фактор-группой H_r группы C_r по подгруппе B_r и обозначается так:

$$H_r \equiv C_r / B_r.$$

Фактор-группа H_r группы циклов C_r по подгруппе B_r циклов, гомологичных нулю, называется группой гомологий или группой Бетти. Элементы же *группы гомологий*, т. е. смежные классы, называются *классами гомологий*. Важным свойством H_r является то, что она гомоморфна C_r. Соответствие устанавливается по правилу:

$$C_r^{(i)} \longrightarrow C_r^{(i)} + B_r,$$

которое, очевидно, сохраняет групповую операцию. В силу гомоморфизма, структура группы H_r сходна со структурой C_r. Вместе с тем H_r несколько «проще», если B_r нетривиальна, т. е. не состоит из одного только элемента — нуля; в этом случае $H_r = C_r$, а информация, содержащаяся в структуре H_r, содержательна, если только $B_r \neq C_r$, так как в этом случае H_r состоит из одного единственного элемента — нуля H_r.

Рассмотрим группы гомологий разбиений многообразий, упомянутых в разд. 2.1.

1. Сфера S^2. Для нульмерных цепей $L_0(S^2) = C_0(S^2)$, так как всякая нульмерная клетка (точка) a является циклом ($\Delta a = 0$). Нульмерных циклов, гомологичных нулю, нет, кроме $\alpha = 0$, поскольку вообще нет одномерных циклов, кроме $l_1 = 0$, границами которых в принципе могли бы быть нульмерные циклы. Таким образом, $B_0(S^2)$ состоит из одного элемента $b_0 = 0$, и потому

$$H_0(S^2) \equiv C_0(S^2)/B_0(S^2) = C_0(S^2) = L_0(S^2).$$

Заметим, что группа $L_0(S^2)$ *и, следовательно,* $H_0(S^2)$ *изоморфна аддитивной группе целых чисел* (последнюю принято обозначать буквой $\mathbb{Z}$). Итак,

$$H_0(S^2) \cong \mathbb{Z}. \tag{2.2.8}$$

Группа одномерных циклов $C_1(S^2)$, как это следует из выражений (2.1.9), состоит из одного элемента — нуля. Поэтому

$$H_1(S^2) = C_1(S^2)/B_1(S^2) = 0. \tag{2.2.9}$$

Наконец, группа двумерных циклов $C_2(S^2) = L_z(S^2) \cong \mathbb{Z}$, причем циклов, гомологичных нулю, кроме нулевого ($C_2 = 0$), нет, так как ни одна отличная от нуля двумерная клетка не ограничивает трехмерной клетки, поскольку отличных от нуля трехмерных клеток нет. Что же касается цикла $C_2 = 0$, то формально он является границей цепи $l_3 = 0$. Таким образом, $B_2(S^2) = 0$,

$$H_2(S^2) = C_2(S^2)/B_2(S^2) \cong \mathbb{Z}. \tag{2.2.10}$$

2. Двумерный тор P_1. Исходя из разбиения (2.1.11) и равенства (2.1.12), заключаем следующее:

$$C_0(P_1) = L_0(P_1) \cong \mathbb{Z}.$$

Нульмерных циклов, гомологичных нулю, кроме $C_0 = 0$, нет, так как моредиан b_1 и параллель b_2 замкнуты и потому отличные от нуля нульмерные циклы не ограничивают одномерных циклов. Что же касается $C_0 = 0$, то он является формально границей одномерной цепи с $\beta_1 = \beta_2 = 0$. Таким образом, $B_0(P_1) = 0$

$$H_0(P_1) = C_0(P_1)/B_0(P_1) = C_0(P_1) \cong \mathbb{Z}. \tag{2.2.11}$$

В группе $C_1(P_1)$ циклов, гомологичных нулю, кроме $C_1 = 0$, нет, так как все $l_2(P_1)$ — циклы. Что же касается $C_1 = 0$, то он является формально границей цепи $l_2 = 0$ с $\gamma = 0$. Таким образом $B_1(P_1) = 0$ и

$$H_1(P_1) = C_1(P_1)/B_1(P_1) = C_1(P_1) \cong \mathbb{Z}. \qquad (2.2.12)$$

Указанный в выражении (2.2.12) изоморфизм означает, что $C_1(P_1) = L_1(P_1)$ есть прямая сумма двух подгрупп $\beta_1 b_1$ и $\beta_2 b_2$, каждая из которых изоморфна аддитивной группе целых чисел $\mathbb{Z}$.[5] Наконец, для $H_2(P_1)$ в полной аналогии (по тем же причинам) с равенством (2.2.10) имеем

$$H_2(P_1) \cong \mathbb{Z}, \qquad (2.2.13)$$

причем, как и выше, $B_2(P_1) = 0$, а $C_2(P_1) = L_2(P_1) \cong \mathbb{Z}$.

3. Двумерный n-крендель (P_n). Рассуждая совершенно так же как в предыдущем случае и, исходя из уравнений (2.1.16) и (2.1.17), получаем

$$H_0(P_n) \cong \mathbb{Z}; \qquad (2.2.14)$$

$$H_1(P_1) \cong \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}}_{2n}; \qquad (2.2.15)$$

$$H_2(P_n) \cong \mathbb{Z}. \qquad (2.2.16)$$

4. Проективная плоскость (N_1). По соображениям, в точности совпадающим с предыдущими случаями, для нульмерной группы гомологий $H_0(N_1)$ разбиения (a) имеем

$$H_0(N_1) = L_0(N_1) \cong \mathbb{Z}. \qquad (2.2.17)$$

В разбиении a группа одномерных циклов $C_1(N_1) = L_1(N_1)$, причем $L_1(N_1) \cong \mathbb{Z}$. Подгруппа циклов, гомологичных нулю $B_1(N_1)$, состоит из

---

[5] Термин «прямая сумма групп» по содержанию идентичен «прямому произведению групп» с мультипликативной операцией. Напомним, что группа G является прямым произведением своих подгрупп $G_1 \ldots G_n$, если:

а) все элементы G_i перестановочны с G_j,

б) любой $g \in G$ однозначно представим в виде:

$$g = g_1 \cdot g_2 \cdot \ldots \cdot g_n.$$

Для абелевых групп пункт а) всегда выполняется.

одномерных цепей, в которых коэффициенты $\beta = 2\gamma$ — четные числа (см. формулу (2.1.19)). Смежные классы по подгруппе $B_1(N_1)$ имеют вид:

$$\beta_i b + B_1(N_1) = \{\beta_i b + 2\gamma b\} = \{(2\gamma + \beta_i)b\}.$$

Если $\beta_i = 2\gamma_i$, где γ_i — целое число, то

$$\beta_i b + B_1(N_1) = B_1(N_1).$$

Если $\beta_i = 2\gamma_i + 1$, то соответствующий смежный класс не совпадает с $B_1(N_1)$. Однако любые два смежные класса $\beta_i b + B_1(N_1)$ и $\beta_i b + B_1(N_1)$, где β_i, β_j — нечетные числа, совпадают даже, если $\beta_i \neq \beta_j$, поскольку

$$\beta_i b - \beta_j b = (\beta_i - \beta_j)b = 2(\gamma_i - \gamma_j)b \in B_1(N_1).$$

Таким образом, имеются всего два разных смежных класса:

$$h = B_1(N_1) = \{2\gamma b\}$$

и

$$h' = b + B_1(N_1) = \{(2\gamma + 1)b\}.$$

Отсюда следует, что одномерная группа Бетти проективной плоскости $H_1(N_1)$ состоит из двух элементов h и h'; при этом

$$h + h = h; \quad h + h' = h'; \quad h' + h' = h.$$

Очевидно, что $H_1(N_1)$ изоморфна аддитивной группе целых чисел 0 и 1 с операцией сложения по $\mathrm{mod}\, 2$

$$0 + 0 = 0; \qquad 0 + 1 = 0; \qquad 1 + 1 = 0;$$

(изоморфизм: $0 \longleftrightarrow h$, $1 \longleftrightarrow h'$). Эта группа обозначается через $\mathbb{Z}_2$. Заметим, что $\mathbb{Z}_2$ изоморфна фактор-группе группы $\mathbb{Z}$ по подгруппе четных чисел $\mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Итак

$$H_1(N_1) \cong \mathbb{Z}_2. \tag{2.2.18}$$

Группа двумерных циклов $C_2(N_1)$ в случае разбиения а) состоит из одного элемента — нуля, который, конечно, гомологичен нулю, так как формально является границей трехмерной цепи $l_3 = 0$. Следовательно, мы имеем

$$H_2(N_1) = 0. \tag{2.2.19}$$

Рассмотрим теперь группы гомологий проективной плоскости N_1 для разбиения б). Группа нульмерных циклов $C_0(N_1)$ для этого разбиения, как и для любого другого, совпадает со всей группой нульмерных цепей $L_0(N_1)$. Подгруппу же нульмерных циклов, гомологичных нулю, $B_0(N_1)$ согласно равенствам (2.1.21) образуют циклы с $\alpha_2 = -\alpha_1$. Перепишем $C_0(N_1) = L_0(N_1)$ в другой форме, изменив базис:

$$C_0(N_1) = \{\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2\} = \{\alpha_+ a_1 + \alpha_-(a_2 - a_1)\},$$

где

$$\alpha_+ = \alpha_1 + \alpha_2; \qquad \alpha_- = \alpha_2.$$

Эта запись показывает, что все смежные классы групп нульмерных циклов по подгруппе циклов, гомологичных нулю $B_0(N_1) = \{\alpha_-(a_2 - a_1)\}$ имеют вид:

$$\alpha + a_1 + B_0(N_1).$$

При этом два смежных класса с различными α_+ всегда различны, так как если

$$\alpha_+ - \alpha'_+ \neq 0,$$

то

$$(\alpha_+ - \alpha'_+)a_1 \neq \alpha_-(a_2 - a_1) \notin B_0(N_1).$$

Из сказанного следует, что для рассматриваемого разбиения проективной плоскости, так же как и для разбиения *a*

$$H_0(N_1) \cong \mathbb{Z}.$$

Группа одномерных циклов $C_1(N_1)$ в соответствии с (2.1.21) имеет вид:

$$C_1(N_1) = \beta_2 b_2 + \beta_3 b_3.$$

Подгруппа же циклов, гомологичных нулю, $B_1(N_1)$ в данном случае получается из $C_1(N_1)$ при условии, что коэффициент

$$\beta_2 = 2\gamma,$$

т. е. является четным числом:

$$B_1(N_1) = \{2\gamma b_2 + \beta b_3\}.$$

Элементы смежного класса по этой подгруппе имеют вид:

$$\{(\beta_2 + 2\gamma)b_2 + (\beta_3 + \beta)b_3\}.$$

Два смежных класса, соответствующие коэффициентам β_2, β_3 и β'_2, β'_3, совпадают, если

$$\beta_2 - \beta'_2 = 2\gamma',$$

т. е. является четным числом. Из этого следует, что имеется только два различных класса, а именно сама подгруппа $B_1(N_1)$ и смежный класс

$$b_2 + \beta_3 b_3 + B_1(N_1) = \{(2\gamma + 1)b_2 + (\beta_3 + \beta)b_3\}.$$

Снова, как и в разбиении а), получаем

$$H_1(N_1) \cong \mathbb{Z}_2.$$

Наконец, группа двумерных циклов $C_2(N_1)$, согласно выражению (2.1.21), состоит из одного элемента $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$, т. е. из нулевого цикла, который вместе с тем гомологичен нулю (ограничивает нулевую трехмерную цепь). Отсюда следует, что и для данного разбиения проективной плоскости

$$H_2(N_1) = 0;$$

Совпадение (изоморфизм) групп Бетти для двух различных разбиений проективной плоскости N_1, разумеется, неслучайно. Имеет место общая теорема, доказывать которую мы здесь не будем, что *группы гомологий различных разбиений одного и того же многообразия изоморфны.* Поскольку же каждое данное разбиение является очевидным топологическим инвариантом (группы цепей не меняются при топологических преобразованиях), то указанная теорема означает, что *группы гомологий являются топологическими инвариантами*, т. е., что *группы гомологий гомеоморфных многообразий изоморфны.*

5. Бутылка Клейна (N_2). Для вычисления групп гомологий этого многообразия мы используем разбиение на рис. 17 (формулы (2.1.25), (2.1.26), как наиболее простое из двух рассмотренных. Мы имеем

$$H_0(N_2) \cong \mathbb{Z}. \tag{2.2.20}$$

Этот результат на основе формул (2.1.22) и (2.1.23) устанавливается совершенно так же, как в случае разбиения б) проективной плоскости. Группа $C_1(N_2)$ одномерных циклов имеет вид:

$$C_1(N_2) = \{\beta_1 b_1 + \beta_2 b_2\},$$

а подгруппа циклов, гомологичных нулю, определяется равенством:

$$B_1(N_2) = \{2\gamma(b_1 + b_2)\}.$$

Переписав $C_1(N_2)$ в форме:

$$C_1(N_2) = \beta_+(b_1 + b_2) + \beta_- b_1,$$

где

$$\beta_- = \beta_1 - \beta_2; \qquad \beta_+ = \beta_2,$$

мы приходим к следующим заключениям. Общий вид смежного класса по подгруппе $B_1(N_2)$ дается выражением:

$$\{(2\gamma + \beta_+)(b_1 + b_2) + \beta_- b_1\}.$$

Смежные классы с различными β_- различны. Если же коэффициенты β_- одинаковы, то смежные классы различны, когда разность:

$$\beta_+ - \beta'_+ = 2\gamma' + 1,$$

т. е. является нечетным числом. Фактор-группа $H_1(N_2)$ разбивается, следовательно, на две подгруппы:

подгруппу

$$B_1(N_2),\ (b_1 + b_2) + B_1(N_2)$$

и подгруппу

$$\beta_-(b_1 - b_2) + B_1(N_2).$$

Первая из этих подгрупп изоморфна $\mathbb{Z}_2$, вторая — $\mathbb{Z}$. В результате имеем

$$H_1(N_2) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2. \tag{2.2.21}$$

Что касается $H_2(N_2)$, то совершенно так же, как и в случае проективной плоскости, находим

$$H_2(N_2) \cong 0. \tag{2.2.22}$$

Читателю предоставляется получить формулы (2.2.20) — (2.2.22), исходя из разбиения рис. 16 (формулы (2.1.22) — (2.1.24)).

Полученные результаты позволяют почувствовать полезность аппарата групп Бетти. В самом деле, сравним тор и бутылку Клейна. Выше отмечалось, что хотя эти две поверхности не гомеоморфны, их эйлеровы характеристики равны

$$\chi(P_1) = \chi(N_2) = 0;$$

Для того, чтобы их различить, кроме задания эйлеровых характеристик, надо еще словесно указать, что тор — ориентируемая поверхность, а бутылка Клейна неориентируема. Теперь же различие этих двух поверхностей сформулировано алгебраически. Именно, это различие проявилось в неизоморфности гомологических групп:

$$H_1(P_1) \ncong H_1(N_2), \qquad H_2(P_1) \ncong H_2(N_2). \tag{2.2.23}$$

Неизоморфность гомологических групп может быть выражена с помощью чисел. Такими *топологическими «квантовыми числами» являются числа Бетти.* Они будут рассмотрены в следующем разделе.

В заключение этого параграфа отметим, что во всех рассмотренных примерах

$$H_0 \cong \mathbb{Z}.$$

Это обстоятельство неслучайно и обусловлено тем, что рассматривались только связные поверхности. Если же многообразие несвязно и состоит из k связных компонентов, то для нульмерных гомологических групп H_0 имеет место изоморфизм:

$$H_0 \cong \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}}_{k}. \tag{2.2.24}$$

Таким образом, нульмерные гомологии не очень интересны — группа N_0 фактически содержит лишь информацию о связности многообразия в указанном выше смысле.

Подчеркнем еще один общий результат, полученный в предыдущем рассмотрении. Мы имели возможность убедиться (см. формулы (2.2.14)–(2.2.16)), что все двусторонние замкнутые поверхности P_n имеют группы гомологий, не́ содержащие (в прямой сумме) конечных (циклических) подгрупп типа $\mathbb{Z}_2$, которые содержатся в гомологических группах неориентируемых поверхностей H_n. Насколько нетривиально появление циклических подгрупп $\mathbb{Z}_2$ в гомологиях видно из того, что наличие таких циклических подгрупп в гомологиях было первоначально «просмотрено» Пуанкаре в его первой топологической работе *Analysis situs* (1895), совершенно изумительной по богатству идей.

2.3. Числа Бетти и характеристики кручений.

Как следует из предыдущего, *группы гомологий* являются абелевыми *группами с конечным числом образующих* или, как говорят иногда, *конечно-порожденными группами*[6].

Во всех рассмотренных примерах, группы H_r имели вид:

$$H_2 \cong \mathbb{Z} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z} + G_{m_2}, \tag{2.3.1}$$

где G_{m_2} — конечная группа порядка m_2 (в наших примерах $G_{m_2} = \mathbb{Z}_2$). Этот результат в действительности является частным случаем общей алгебраической теоремы: *конечно-порожденная группа разлагается в прямую сумму свободных циклических групп и группы G_{m_2} конечного порядка m_2*. В свою очередь, *любая конечная абелева группа G_{m_2}* (такие группы называют также *периодическими) разлагается в прямую сумму циклических групп*, причем здесь имеет место *аналог теоремы Фурье для периодической функции: порядки всех циклических слагаемых* в указанной прямой сумме *кратны порядку $f_1 > 1$ одного из слагаемых.* Более того, порядок f_k каждого k-го слагаемого является делителем порядка f_{k+1} $(k+1)$-слагаемого (нумерация выбрана так, что $f_{k'} > f_k$, если $k' > k$). Таким образом

[6]Напомним, что абелевой группой с конечным числом образующих называется такая группа, что любой ее элемент может быть представлен в виде линейной комбинации некоторого конечного числа одних и тех же элементов группы; эти элементы называются образующими группы, а их совокупность — базисом.