Подчеркнем еще один общий результат, полученный в предыдущем рассмотрении. Мы имели возможность убедиться (см. формулы (2.2.14)–(2.2.16)), что все двусторонние замкнутые поверхности P_n имеют группы гомологий, не́ содержащие (в прямой сумме) конечных (циклических) подгрупп типа $\mathbb{Z}_2$, которые содержатся в гомологических группах неориентируемых поверхностей H_n. Насколько нетривиально появление циклических подгрупп $\mathbb{Z}_2$ в гомологиях видно из того, что наличие таких циклических подгрупп в гомологиях было первоначально «просмотрено» Пуанкаре в его первой топологической работе *Analysis situs* (1895), совершенно изумительной по богатству идей.

2.3. Числа Бетти и характеристики кручений.

Как следует из предыдущего, *группы гомологий* являются абелевыми *группами с конечным числом образующих* или, как говорят иногда, *конечно-порожденными группами*[6].

Во всех рассмотренных примерах, группы H_r имели вид:

$$H_2 \cong \mathbb{Z} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z} + G_{m_2}, \tag{2.3.1}$$

где G_{m_2} — конечная группа порядка m_2 (в наших примерах $G_{m_2} = \mathbb{Z}_2$). Этот результат в действительности является частным случаем общей алгебраической теоремы: *конечно-порожденная группа разлагается в прямую сумму свободных циклических групп и группы G_{m_2} конечного порядка m_2*. В свою очередь, *любая конечная абелева группа G_{m_2}* (такие группы называют также *периодическими) разлагается в прямую сумму циклических групп*, причем здесь имеет место *аналог теоремы Фурье для периодической функции: порядки всех циклических слагаемых* в указанной прямой сумме *кратны порядку $f_1 > 1$ одного из слагаемых*. Более того, порядок f_k каждого k-го слагаемого является делителем порядка f_{k+1} $(k{+}1)$-слагаемого (нумерация выбрана так, что $f_{k'} > f_k$, если $k' > k$). Таким образом

[6]Напомним, что абелевой группой с конечным числом образующих называется такая группа, что любой ее элемент может быть представлен в виде линейной комбинации некоторого конечного числа одних и тех же элементов группы; эти элементы называются образующими группы, а их совокупность — базисом.

$$G_{m_r} \cong \mathbb{Z}_{f_1^{(r)}} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_{f_s^{(r)}}, \quad f_{k+1}^{(r)} > f_k^{(r)}, \quad f_k^{(r)} > 1, \quad \prod_{k=1}^{s} f_k^{(r)} = m_r, \tag{2.3.2}$$

причем f_k^r делится на f_{k+1}^r. *Число свободных циклических слагаемых* p_r в выражении (2.3.1) называется *рангом группы* H_r или *числом Бетти размерности* r многообразия. *Числа же*

$$f_1^{(r)}, \ldots, f_s^{(r)} \tag{2.3.3}$$

в выражении (2.3.2) называются *коэффициентами кручения группы* H_r или *коэффициентами кручения размерности* r *многообразия*[7].

Если порядок f циклической группы $\mathbb{Z}_f$ разлагается на простые множители

$$f = q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_l,$$

то, очевидно,

$$\mathbb{Z}_f \cong \mathbb{Z}_{q_1} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_{q_l}. \tag{2.3.4}$$

Из выражений (2.3.2) и (2.3.4) следует, что периодическая абелева группа может быть разложена в прямую сумму циклических подгрупп, порядки которых являются простыми числами. Поэтому G_{m_r} может быть охарактеризована указанием порядков

$$q_1^{(r)}, \ldots, q_l^{(r)}, \qquad m_r = \prod_{j=1}^{l_r} q_j^{(r)} \tag{2.3.5}$$

своих примарных составляющих (заметим, что среди чисел $q_j^{(r)}$ могут быть одинаковые)[8]. Числа (2.3.5) называют иногда конечными инвариантами H_r или числами примарных кручений. Изложенным выше исчерпываются все «квантовые числа» гомологических групп. В табл. 1 приведены числа Бетти.

---

[7]Отметим следующее свойство f_1^r: это число является наименьшей из «координат» элементов G_{m_r} в разложении G_{m_r} по образующей.

[8]Циклическая группа, порядок которой есть степень простого числа, называется примарной.

Таблица 1.
Числа Бетти и коэффициенты кручения замкнутых двумерных поверхностей

Многообразие	Числа Бетти			Коэффициенты кручений		
	p_0	p_1	p_r	$r=0$	$r=1$	$r=2$
S^2	1	0	1	0	0	0
P_n	1	$2n$	1	0	0	0
N_n	1	$n-1$	0	0	2	0

и коэффициенты кручения. Как видно из таблицы, для ориентируемых многообразий справедливо соотношение

$$p_{n-r} = p_r, \tag{2.3.6}$$

называемое «теоремой двойственности Пуанкаре». Эта теорема справедлива и для ориентируемых многообразий высших размерностей больше 2.[9] Для двумерных ориентируемых многообразий в силу теоремы о двойственности нетривиальным оказывается только одномерное число Бетти p_1, имеющее, очевидно, простой геометрический смысл: оно равно максимальному числу неограниченных циклов. Положение меняется, когда мы переходим к неориентируемым поверхностям. Например, для проективной плоскости цикл, начинающийся и кончающийся в бесконечно–удаленной точке, не ограничивает, тем не менее $p_1(N_1) = 0$. Теорема двойственности может быть обобщена на неориентируемые многообразия, если рассматривать гомологии по модулю 2 или вообще по модулю отличного от 1 числа. Этому вопросу посвящен раздел 2.4.

Укажем связь эйлеровой характеристики χ с числами Бетти. Имеет место следующее соотношение, справедливое для многообразий любой размерности n:

[9] В оригинале *Analysis situs* Пуанкаре формулировал теорему двойственности так: «числа Бетти, равноотстоящие от концов, равны».

$$\chi = \sum_{r=1}^{n} (-1)^r p_r. \tag{2.3.7}$$

Это соотношение также было впервые получено Пуанкаре в *Analysis situs.*

Для ориентируемых многообразий размерности n, если n четно, но $n/2$ нечетно, «срединное» число Бетти $p_{n/2}$ четно. Проявлением этого правила в случае $n = 2$ есть равенство $p_1(P_n) = 2n$.

Остановимся теперь вкратце на вычислениях чисел Бетти многообразий более высокой размерности $(n+1)$. В ряде случаев удобный прямой путь состоит в погружении замкнутого n-мерного многообразия в евклидово пространство большей размерности $(n + 1)$. Далее, выбрав удобную форму многообразия,например, в виде многогранника — тетраэдра, куба и т. п., следует задать координаты вершин и с их помощью перечислить ребра, грани и другие клетки всех размерностей. Следующий этап состоит в идентификации элементов многогранника, превращающей его в исследуемое многообразие. В зависимости от относительной ориентации идентифицируемых клеток (вершин, ребер, граней и т. д.) мы получим ориентируемое или неориентируемое многообразие. Если после идентификации не остается «свободных» вершин, граней и др. клеток с размерностью, меньшей n, то образованное многообразие будет n-мерной замкнутой поверхностью. Указанное построение содержит в себе и определение клеточного разбиения, позволяющее выписать цепи и применить стандартную процедуру вычисления групп гомологий и соответствующих чисел Бетти. Поскольку при отсутствии наглядной картины возможны ошибки в идентификации элементов вспомогательного многогранника, надо следить за тем, чтобы возникшие после идентификации клетки, проходящие через одну вершину, образовывали «звезду», т. е. захватывали полный телесный угол $(n-1)$-мерной сферы с центром в данной вершине. Следить же за этим можно с помощью следующего приема. Если представить себе $(n-1)$-мерную сферу с центром в данной вершине, то ребра, грани и др. клетки звезды, продолженные до пересечения с поверхностью сферы, определяют клеточное разбиение этой сферы. Число образовавших клеток должно, согласно формуле (2.2.5), давать эйлерову характеристику $\chi(S^{n-1})$, равную 0, если $n-1$ нечетно, и 2, если $n-1$ четно. Сказанное поясняется рис. 18.

Очевидно, что число K_r r-мерных граней сферы будет равно числу K_{r+1} $(r+1)$-мерных граней звезды. Вычисление чисел Бетти чаще удобно производить косвенными методами. Эти методы основываются на связи других характеристик многообразий, вообще говоря, зависящих от конкретной реализации многообразия с искомыми числами Бетти. В качестве примера приведем соотношение между гауссовой кривизной замкнутой двумерной поверхности и ее эйлеровой характеристикой[10]. Справедлива следующая формула Гаусса–Бонне (1848 г.)

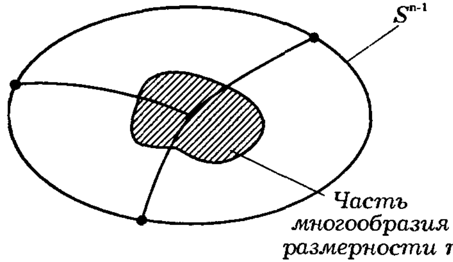

Рис. 18. Звезда и определяемое ею клеточное разбиение сферы с центром в вершине.

$$\frac{1}{2\pi}\oint K(\vec{x})\,d\sigma = \chi. \tag{2.3.8}$$

Здесь $K(\vec{x})$ — гауссова кривизна в точке $\vec{x} d\sigma$ — элемент поверхности, а интегрирование ведется по всей поверхности. Эта формула может быть использована для вычисления эйлеровых характеристик многообразий, заданных аналитически уравнениями типа (1.2.1) или (1.2.4). Другие косвенные методы нахождения чисел Бетти состоят в использовании теории сложения (см. ниже 2.5, 2.6) и *теории расслоений (расслоенных пространств)*. Теоремы сложения сводят вычисление групп гомологий для некоторого многообразия к вычислению аналогичных групп для более простых частей этого многообразия той же или меньшей размерности. Расслоения, будучи объектами, которые можно назвать обобщенными прямыми произведениями многообразий, дают возможность понижать размерность, т. е. выражать группы гомологий многообразий высших размерностей.

---

[10]Напомним, что гауссова кривизна $K(\vec{x})$ определяется как предел отношения ориентированных площадей соответственных бесконечно малых участков поверхности единичной сферы нормалей и рассматриваемой поверхности.