2.4. Гомологии и числа Бетти по модулю

Вместо группы циклов C_r можно рассматривать ее фактор-группу по подгруппе целых чисел, делящихся на некоторое число m . Точнее, так как C_r — свободная группа с некоторым (конечным) числом образующих

$$C_r \cong \mathbb{Z} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}, \tag{2.4.1}$$

то C_r имеет подгруппу

$$C_r(m) \cong \mathbb{Z}(m) \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}(m), \tag{2.4.2}$$

где $\mathbb{Z}(m)$ — аддитивная группа целых чисел, делящихся на m, являющаяся подгруппой группы Z. Мы рассматриваем фактор-группу

$$C_r \pmod m = C_r/C_r(m). \tag{2.4.3}$$

Легко видеть, что $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}(m)$ изоморфна конечной из элементов $0, 1, 2, \ldots, q, \ldots, m-1$, в которой групповая операция сложения определена по $\mod m$. Именно, по определению

$$q + q' = R(q + q'), \tag{2.4.4}$$

где $R(q + q')$ — остаток от деления числа $q + q'$ на m. Ясно, что эта группа является циклической группой m-го порядка и, таким образом,

$$\mathbb{Z}/\mathbb{Z}(m) \cong \mathbb{Z}_m. \tag{2.4.5}$$

Отсюда следует, что

$$C_r \pmod m \cong \mathbb{Z}_m \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_m, \tag{2.4.6}$$

причем число слагаемых в выражении (2.4.6) равно числу слагаемых в выражении (2.4.1). Согласно изложенному, $C_r \pmod m$ получается из C_r, если заменить в C_r обычное арифметическое сложение коэффициентов в абстрактной сумме сложением по $\mod m$. При этом из подгруппы B_r циклов, гомологичных нулю, мы получим группу $B_r \pmod m$, которая, очевидно, будет подгруппой группы C_r (mod m). Взяв теперь соответствующую *фактор-группу* C_r (mod m)/B_r (mod m), *мы получим группу гомологий* H_r (mod m) *по модулю* m:

$$H_r\ (\mathrm{mod}\ m) \equiv C_r\ (\mathrm{mod}\ m)/B_r\ (\mathrm{mod}\ m). \qquad (2.4.7)$$

Поскольку H_r (mod m) есть конечная группа, то ее разложение в прямую сумму циклических подгрупп может содержать только циклические слагаемые конечного порядка, причем наивысшим возможным порядком является число m. В этом смысле особенно проста структура групп гомологий по модулю 2.

Ясно, что

$$H_r\ (\mathrm{mod}\ 2) \cong \underbrace{\mathbb{Z}_2 \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_2}_{p_r\ (\mathrm{mod}\ 2)}. \qquad (2.4.8)$$

Число слагаемых p_r (mod 2) *в прямой сумме* (2.4.8) называется r-мерным *числом Бетти по модулю 2.* При произвольном модуле m *r-мерным числом Бетти по модулю m называется число образующих* $\mathbb{Z}_m$ *в разложении* H_r (mod m).

Очевидно, что группы гомологий по модулю H_r (mod m) в меньшей степени характеризуют многоообразие, чем группы H_r. В самом деле, переход к гомологиям по модулю получается в результате замены группы циклов C_r ее фактор-группой $C_r/C_r(m)$. Последняя же лишь гомоморфна группе C_r, а не изоморфна ей, а потому отражает лишь некоторые особенности структуры C_r, но не все детали этой структуры. То же, естественно, относится и к сравнению интересующих нас в конечном счете групп H_r (mod m) с группами H_r. Это «огрубление» групп гомологий по модулю по сравнению с полными группами гомологий дает, с другой стороны, ту выгоду, что вычисление H_r (mod m) и, соответственно, p_r (mod m) оказывается иногда проще. Вместе с тем, для некоторых проблем, в частности, для задач, решаемых в теории Морса, информации, содержащейся в p_r (mod m), оказывается достаточно для получения нетривиальных результатов. Смысл «огрубления» H_r при переходе к H_r (mod 2) состоит в том, что эти гомологии «не чувствуют» тех деталей топологической структуры многообразий, которые определяются ориентацией, т. е. связаны с тем фактом, что многообразие разбито не просто на клетки, а на ориентированные клетки. Действительно, циклам $+c_r$ и $-c_r$ отвечает один и тот же элемент $C_r \pmod 2) = C_r/C_r(2)$, а именно смежный класс $c_r + C_r(2)$, поскольку

$$c_r - (-c_r) = 2c_r \in C_r(2)$$

и, следовательно, смежные классы $c_r + C_r(2)$ и $-c_r + C_r(2)$ совпадают.

Таблица 2

Схема вычисления $p_r \pmod 2$ для проективной плоскости

r	l	$l \pmod 2$	Δl	$\Delta \pmod 2$	C_r	$C_r \pmod 2$	$B_r \pmod 2$	$H_r \pmod 2$	$p_r \pmod 2$
0	αa		0	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	0	$\mathbb{Z}_2$	1
1	βb		0	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	0	$\mathbb{Z}_2$	1
2	γg		$2\gamma b$	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	0	$\mathbb{Z}_2$	1

Таблица 3

Числа Бетти (mod 2) для двумерных замкнутых многообразий

Многообразие	$p_r \pmod 2$		
	$r=0$	$r=1$	$r=2$
P_n	1	$2n$	1
N_n	1	n	1

Приведем теперь, в качестве примера, вычисление $H_r \pmod 2$ и $p_r \pmod 2$ для проективной плоскости. Для разбиения а) (формулы (2.1.18) — (2.1.19) схема вычисления передается табл. 2. В табл. 3 приведены числа Бетти по модулю 2 для всех двумерных замкнутых поверхностей. Как видно из табл. 1 и 3, $p_r \pmod 2$ для ориентируемых поверхностей P_n равны обычным числам Бетти, тогда как для неориентируемых поверхностей N_n $p_r \pmod 2 \neq p_r$. Мы видим также, что при переходе к гомологиям по модулю 2 соотношение двойственности Пуанкаре имеет место для всех поверхностей, как ориентируемых, так и неориентируемых:

$$p_{n-r} \pmod 2 = p_r \pmod 2. \tag{2.4.9}$$

Из табл. 3 также видно, что числа p_r (mod 2) в отличие от p_r не определяют многообразие однозначно: p_r (mod 2) одинаковы для P_k и N_{2k} в частности, для тора и бутылки Клейна.

Отметим, что особенность проективной плоскости, состоящая в равенстве 1 для всех чисел Бетти (mod 2), сохраняется и в многомерном случае $n > 2$.

2.5. Многообразия с «краем». Относительные гомологии

В случае многообразий с краем такую же роль, как и циклы, играют незамкнутые подмногообразия, «опирающиеся на край», т. е. подмногообразия, границы которых лежат в границе всего многообразия в целом (в «крае»). Действительно, поверхность с краем может быть разделена на части не только замкнутой кривой — циклом, но и всякий кривой, начинающейся и *заканчивающейся в точках границы.* С другой стороны, как тор от сферы отличается наличием циклов, не делящих поверхность на отдельные части (не гомологичные нулю), так и круговое кольцо от круга отличается наличием классов, не делящих поверхность незамкнутых линий, опирающихся на границу (внутреннюю и внешнюю окружности).

Отсюда ясно, что в случае многообразий с краем теория гомологий должна быть видоизменена таким образом, чтобы кривые (подмногообразия в общем случае), опирающиеся на край, играли роль, аналогичную циклам в теории замкнутых поверхностей (многообразий). Для этого точки упомянутых кривых, лежащие на границе поверхности, должны как бы исключаться, считаться несущественными. Мы не можем себе позволить отождествлять их каким-либо образом, так как это изменило бы топологические свойства поверхности, например, отождествление граничных окружностей кругового кольца превратило бы кольцо в тор или бутылку Клейна в зависимости от схемы отождествления. Сделать же указанные точки несущественными можно, объединив их в некоторое множество, которое затем будет рассматриваться, как нулевой элемент некоторой аддитивной группы. Очевидно, что такой группой должна быть фактор-группа цепей по какой-то из ее подгрупп.

Сказанное означает, что *видоизменение теории гомологий в случае*