Из табл. 3 также видно, что числа $p_r \pmod 2$ в отличие от p_r не определяют многообразие однозначно: $p_r \pmod 2$ одинаковы для P_k и N_{2k} в частности, для тора и бутылки Клейна.

Отметим, что особенность проективной плоскости, состоящая в равенстве 1 для всех чисел Бетти $\pmod 2$, сохраняется и в многомерном случае $n > 2$.

2.5. Многообразия с «краем». Относительные гомологии

В случае многообразий с краем такую же роль, как и циклы, играют незамкнутые подмногообразия, «опирающиеся на край», т. е. подмногообразия, границы которых лежат в границе всего многообразия в целом (в «крае»). Действительно, поверхность с краем может быть разделена на части не только замкнутой кривой — циклом, но и всякий кривой, начинающейся и *заканчивающейся в точках границы.* С другой стороны, как тор от сферы отличается наличием циклов, не делящих поверхность на отдельные части (не гомологичные нулю), так и круговое кольцо от круга отличается наличием классов, не делящих поверхность незамкнутых линий, опирающихся на границу (внутреннюю и внешнюю окружности).

Отсюда ясно, что в случае многообразий с краем теория гомологий должна быть видоизменена таким образом, чтобы кривые (подмногообразия в общем случае), опирающиеся на край, играли роль, аналогичную циклам в теории замкнутых поверхностей (многообразий). Для этого точки упомянутых кривых, лежащие на границе поверхности, должны как бы исключаться, считаться несущественными. Мы не можем себе позволить отождествлять их каким-либо образом, так как это изменило бы топологические свойства поверхности, например, отождествление граничных окружностей кругового кольца превратило бы кольцо в тор или бутылку Клейна в зависимости от схемы отождествления. Сделать же указанные точки несущественными можно, объединив их в некоторое множество, которое затем будет рассматриваться, как нулевой элемент некоторой аддитивной группы. Очевидно, что такой группой должна быть фактор-группа цепей по какой-то из ее подгрупп.

Сказанное означает, что *видоизменение теории гомологий в случае* *многообразий с краем* должно состоять *в переходе от группы цепей к ее фактор-группе по подгруппе цепей*, лежащих в границе. *Подобная фактор-группа* есть разновидность группы так называемых *относительных цепей*. В общем случае, группа относительных цепей определяется следующим образом. Пусть $N \subset M$ есть некоторое подмногообразие многообразия M. Допустим далее, что клеточное разбиение N есть часть клеточного комплекса M, и что поэтому группа цепей $L(N)$ есть подгруппа группы цепей $L(M)$. Тогда *фактор-группа*

$$L(M, N) = L(M)/L(N) \tag{2.5.1}$$

называется *группой относительных цепей*. При определенном выборе клеточного базиса относительную цепь $l(M, N)$ можно было бы заменить цепью $l(M \setminus N)$, где $M \setminus N$ — разность множеств M и N. Но такое определение было бы неинвариантно относительно выбора базиса. Оно практически совпало бы с выражением (2.5.1), если бы базис разбивался на две части: клетки, лежащие в $M \setminus N$, и клетки, лежащие в N. Однако при переходе к новому базису

$$\overline{a}_k = \sum_j \alpha_{kj} a_j$$

замена $L(M, N)$ на $L(M \setminus N)$ уже была бы неоправданна, тогда как равенство (2.5.1) имеет смысл всегда и при любом выборе базиса определяет один и тот же объект. Чтобы осуществить намеченное обобщение понятия цикла, включающее в циклы кривые, опирающиеся на границу, определим границу $\overline{\Delta} l_r(M, N)$ относительной цепи $l_r(M, N)$ (в дальнейшем мы обозначим элементы группы цепей малыми буквами, а сами группы — большими). *Относительная r-мерная цепь* $l_r(M, N)$, согласно выражению (2.5.1), есть *смежный класс:*

$$l_r(M, N) = l_r(M) + L_r(N). \tag{2.5.2}$$

Очевидно, что граница $\overline{\Delta} l_r(M, N)$ должна быть относительной $r-1$ цепью, т. е. смежным классом по подгруппе $L_{r-1}(N)$. Элементом, порождающим этот смежный класс, должна быть граница $\Delta l_r(M)$, являющаяся обычной $(r-1)$-мерной цепью. Таким образом, мы полагаем

$$\overline{\Delta} l_r(M, N) = \Delta l_r(M) + L_{r-1}(N). \tag{2.5.3}$$

Согласно равенству (2.5.3), обычный цикл ($\Delta l_r(M) = 0$) и цепь, опирающаяся на N, ($\Delta l_2(M) \neq 0$, но $\Delta l_2(M) \in L_{r-1}(N)$) теперь совершенно уравниваются: в обоих случаях

$$\overline{\Delta} l_r(M, N) = L_{r-1}(N) = O(L_{r-1}(M)/L_{r-1}(N)), \tag{2.5.4}$$

Нетрудно убедиться, что как и обычная граница, относительная граница удовлетворяет требованию, чтобы граница границы равнялась нулю. Действительно, учитывая, что $\Delta(\Delta l_r) = 0$, из выражения (2.5.3) имеем

$$\overline{\Delta}(\overline{\Delta} l_r(M, N)) = \Delta(\Delta l_r(M)) + L_{r-r}(N) = L_{r-r}(N) = 0. \tag{2.5.5}$$

Дальнейшее построение теории относительных гомологий уже совершенно очевидно. Мы говорим, что относительная цепь $C_r(M, N)$ является относительным циклом, если

$$\overline{\Delta} C_r(M, N) = 0. \tag{2.5.6}$$

Ясно, что относительные циклы образуют группу $C_r(M,N) \subset L_r(M,N)$.

В группе $C_r(M, N)$ мы различаем подгруппу $B_r(M, N)$ относительных циклов $b_r(M, N)$, являющихся относительными границами относительных цепей $b_{r+1}(M, N)$. Наконец, группой r-мерной относительной гомологии мы называем фактор-группу[11].

$$H_r(M, N) = C_r(M, N)/B_r(M, N). \tag{2.5.7}$$

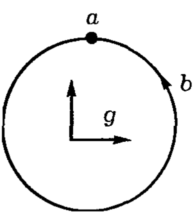

Рис. 19. Простейшее клеточное разбиение круга.

Рассмотрим некоторые примеры вычисления группы относительных гомологий для многообразий с краем.

1. Двумерный шар (круг) R_0^2. Клеточное разбиение показано на рис. 19. Оно содержит нульмерную, одну одномерную и одну двумерные клетки:

$$l_0(R_0^2) = \alpha a, \qquad l_1(R_0^2) = \beta b, \qquad l_2(R_0^2) = \gamma g. \tag{2.5.8}$$

---

[11] Для связи с литературой укажем, что $H_r(M, N)$ называют также *относительной гомологией* $M \mod N$.

Далее имеем

$$\Delta l_0 = \Delta l_1 = 0; \qquad \Delta l_2 = \gamma b. \tag{2.5.9}$$

В качестве подмногообразия N выбираем границу круга. Тогда

$$\alpha a \in L_0(N), \qquad \beta b \in L_1(N), \qquad L_2(N) = 0$$

и для групп относительных цепей находим

$$L_0(M,\, N) = 0; \tag{2.5.10}$$

$$L_1(M,\, N) = 0; \tag{2.5.11}$$

$$L_2(M,\, N) = L_2(M). \tag{2.5.12}$$

Очевидно, что все относительные цепи $l_0(M,\, N)$ и $l_1(M,\, N)$ являются относительными циклами. Поэтому

$$L_0(M,\, N) = C_0(M,\, N), \qquad L_1(M,\, N) = C_1(M,\, N). \tag{2.5.13}$$

Для $\overline{\Delta} l_2(M,\, N)$ имеем

$$\overline{\Delta} l_2(M,\, N) = \Delta l_2 + L_1(N) = \gamma b + L_1(N).$$

Так как $\gamma b \in L_1(N)$, то

$$\overline{\Delta} l_2(M,\, N) = 0,$$

т. е.

$$L_2(M,\, N) = C_2(M,\, N) \tag{2.5.14}$$

Поскольку все относительные цепи являются относительными циклами, то относительных циклов $b_r(M,\, N)$, являющихся относительными границами нет. Таким образом:

$$B_r(M,\, N) = 0; \qquad r = 1,\, 2. \tag{2.5.15}$$

Из выражений (2.5.10)–(2.5.15) следует

$$\overline{H}_0 \cong \overline{H}_1 = 0; \qquad \overline{H}_2 \cong \mathbb{Z}. \tag{2.5.16}$$

Черта означает здесь относительную гомологию. Если ввести соответствующие числа Бетти $\overline{p}_r$ (ранги групп относительных гомологий $\overline{H}_r$), то следовательно мы имеем

$$\overline{p}_0(R_0^2) = \overline{p}_1(R_0^2); \qquad \overline{p}_r(R_0^2) = 1. \tag{2.5.17}$$

2. Трехмерный шар R_0^3. Простейшее разбиение, очевидно, будет опять одноклеточным, так что

$$l_0 = \alpha a; \quad l_1 = 0; \quad l_2 = \gamma g; \quad l_3 = \sigma S, \tag{2.5.18}$$

причем клетка g есть сфера S^2, которую примем за подмногообразие N. Все цепи, за исключением трехмерной, являются обычными циклами и принадлежат $L(N)$. Для трехмерных же цепей имеем

$$\Delta l_3 = \sigma g \in L_2(N). \tag{2.5.19}$$

Поэтому трехмерные цепи, не будучи обычными циклами, являются, тем не менее, относительными циклами. Далее, $L_3(N) = 0$, так как N — двумерная сфера S^2, и в полной аналогии с предыдущим получаем

$$\overline{H}_0(R_0^3) \cong \overline{H}_1(R_0^3) \cong \overline{H}_2(R_0^3) \cong 0, \qquad \overline{H}_3(R_0^3) \cong \mathbb{Z} \tag{2.5.20}$$

и

$$\overline{p}_0(R_0^3) = \overline{p}_1(R_0^3) = \overline{p}_r(R_0^3), \qquad \overline{p}_3(R_0^3) = 1. \tag{2.5.21}$$

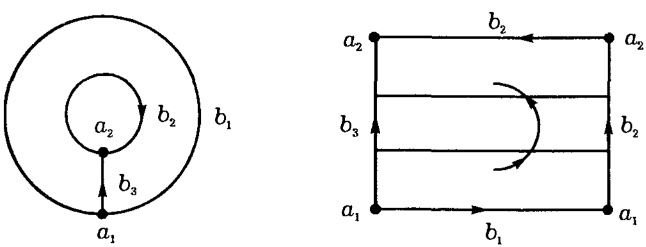

Рис. 20. Клеточное разбиение кругового кольца.

3. Двумерный шаровой слой (круговое кольцо) R_1^2. Простейшее клеточное разбиение показано на рис. 20.

В качестве подмногообразия N выбираем границу кольца $b_1 \cup b_2$. Тогда ясно, что группа нульмерных относительных цепей есть ноль, а группа одномерных относительных цепей $L_1(M, N)$ состоит из одночленных цепей $\beta_3 b_3 + L_1(N)$, т. е.

$$L_1(M, N) = \mathbb{Z}. \tag{2.5.22}$$

Легко видеть, что

$$L_1(M, N) = C_1(M, N),$$

т. е. нульмерные и одномерные цепи — циклы. Далее, одночленная двумерная цепь также является относительным циклом, поскольку граница двумерной клетки лежит целиком в N. Следовательно

$$L_2(M, N) = C_2(M, N)$$

и все цепи опять являются циклами, так что все $B_2(M, N) = 0$. Поэтому мы получаем:

$$\overline{H}_0(R_1^2) = 0, \qquad \overline{H}_1(R_1^2) \cong \mathbb{Z}_1, \qquad \overline{H}_2(R_1^2) \cong \mathbb{Z} \tag{2.5.23}$$

или

$$\overline{p}_0(R_1^2) = 0, \qquad \overline{p}_1(R_1^2) = \overline{p}_2(R_1^2) = 1. \tag{2.5.24}$$

Мы видим, что $\overline{p}_r(R_1^2) \neq \overline{p}_r(R_0^2)$, т. е. наши группы относительных гомологий различают негомеоморфные многообразия.

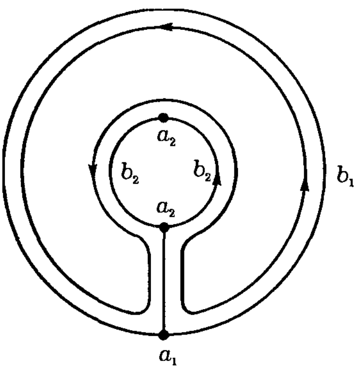

Рис. 21. Клеточное разбиение листа Мёбиуса M_1^2.

4. Лист Мёбиуса M_1^2. Клеточное разбиение воспроизведено на рис. 21. В качестве подмногообразия N выбираем геометрическую границу листа Мёбиуса — окружность b_1. Тогда цепи $l_2(M)$ выглядят так:

$$l_0 = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2; \qquad l_1 = \sum_{i=1}^{3} \beta_i b_i;$$
$$l_2 = \gamma g \tag{2.5.25}$$

из границы

$$\begin{gathered}\Delta l = 0; \quad \Delta l_1 = \beta_3(a_2 - a_1); \\ \Delta l_2 = \gamma b_1 - 2\gamma b_2.\end{gathered} \tag{2.5.26}$$

Относительные цепи:

$$\begin{aligned} &l_0(M, N) = \alpha_2 a_2 + L_0(N); \\ &l_1(M, N) = \beta_2 b_2 + \beta_3 b_3 + L_1(N); \\ &l_2(M, N) = \gamma g \end{aligned} \tag{2.5.27}$$

или

$$\begin{gathered} L_0(M, N) = \mathbb{Z}; \quad L_1(M, N) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}; \\ L_2(M, N) \cong \mathbb{Z}. \end{gathered} \tag{2.5.28}$$

Относительные границы:

$$\overline{\Delta} l_0(M, N) = 0; \qquad C_0(M, N) = L_0(M, N) \cong \mathbb{Z} \tag{2.5.29}$$

$$\overline{\Delta} l_1(M, N) = \beta_3(a_2 - a_1) + L_0(N) = \beta_3 a_2 + L_0(N). \tag{2.5.30}$$

Из равенства (2.5.30) следует, что группа одномерных относительных циклов состоит из цепей с $\beta_3 = 0$:

$$C_1(M, N) = \beta_2 b_2 + L_1(N) \tag{2.5.31}$$

или

$$C_1(M, N) \cong \mathbb{Z}. \tag{2.5.32}$$

Далее имеем

$$\overline{\Delta} l_2(M, N) = \gamma b_1 - 2\gamma b_2 + L_1(N) = -2\gamma b_2 + L_1(N) \tag{2.5.33}$$

и, следовательно, относительным циклом будет только цепь с $\gamma = 0$ или

$$C_2(M, N) = 0. \tag{2.5.34}$$

Сравнивая выражения (2.5.27) и (2.5.30), замечаем, что

$$B_0(M, N) = C_0(M, N) = L_0(M, N),$$

откуда следует

$$\overline{H}_0(M_1^2) \cong 0. \tag{2.5.35}$$

Сравнивая выражения (2.5.31) и (2.5.33) устанавливаем

$$B_1(M,\, N) = -2\gamma b_2 + L_1(N) \cong \mathbb{Z}(2). \tag{2.5.36}$$

Из выражений (2.5.32) и (2.5.36) находим

$$\overline{H}_1(M_1^2) \cong \mathbb{Z}/\mathbb{Z}(2) \cong \mathbb{Z}_2 \tag{2.5.37}$$

Наконец, из выражения (2.5.34) следует

$$\overline{H}_2(M_1^2) \cong 0 \tag{2.5.38}$$

Таким образом, для относительных чисел Бетти листа Мёбиуса имеем

$$\overline{p}_r(M_1^2) = 0, \quad r = 0,\, 1,\, 2; \tag{2.5.39}$$

для относительных коэффициентов кручения $\overline{m}_r(M_1^2)$ получаем

$$\overline{m}_0(M_1^2) = \overline{m}_2(M_1^2) = 0; \qquad \overline{m}_1(M_1^2) = 2. \tag{2.5.40}$$

Легко вычислить также $\overline{p}_r$ (mod 2). В этом случае мы получили бы из выражения (2.5.33), что

$$\overline{\Delta} l_2(M,\, N)/\bmod\ 2 = 0.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} &\overline{B}_1 \text{ (mod 2)} \cong \overline{B}_2 \text{ (mod 2)} \cong 0 \\ &\overline{H}_1 \text{ (mod 2)} \cong \overline{H}_2 \text{ (mod 2)} \cong \mathbb{Z}_2 \end{aligned} \tag{2.5.41}$$

и

$$\overline{p}_0 \text{ (mod 2)} = 0, \quad \overline{p}_1 \text{ (mod 2)} = \overline{p}_2 \text{ (mod 2)} = 1. \tag{2.5.42}$$

Сравнивая три рассмотренных примера негомеоморфных двумерных многообразий с краем, мы видим, что все группы относительных гомологий для них различны и при этом все эти группы гомологий и соответствующие им числа Бетти отличаются от групп гомологий и чисел Бетти для замкнутых двумерных многообразий. Таким образом, относительные гомологии действительно характеризуют топологические свойства многообразий; числа Бетти гомеоморфных многообразий совпадают.

Любопытно посмотреть, что мы получили бы, если бы использовали для описания многообразий с краем не относительные гомологии, а обычные. Нетрудно подсчитать, что обычные группы гомологий и числа Бетти для кольца R_1^2 равны.

$$H_0(R_1^2) \cong H_1(R_1^2) \cong \mathbb{Z}, \qquad H_2(R_1^2) = 0,$$
$$p_0(R_1^2) = p_1(R_1^2) = 1, \qquad p_2(R_1^2) = 0.$$

Совершенно то же самое справедливо и для чисел Бетти листа Мёбиуса. Иными словами, мы получили бы

$$p_r(R_1^2) = p_r(M_1^2)$$

для заведомо не гомеоморфных двумерных многообразий с краем.

Для ориентируемых многообразий с краем относительные числа Бетти имеют почти тот же геометрический смысл, что и обычные числа Бетти для замкнутых ориентируемых многообразий: они дают *минимально возможные числа r-мерных клеток* для данного многообразия *за вычетом лежащих в границе.* Поэтому для ориентируемых многообразий с краем так же, как и для замкнутых, $\overline{p}_r = p_r \pmod 2$. Для неориентируемых многообразий с краем так же, как и для замкнутых неориентируемых многообразий, *указанный геометрический смысл имеют только* $p_r \pmod 2$. Поэтому для *неориентируемых многообразий с краем* $\overline{p}_r = p_r \pmod 2$.[12]

[12]Заметим, что $p_r \pmod 2$ дают минимальное клеточное разбиение вообще возможное для многообразий, гомеоморфных данному. Это минимальное разбиение для конкретной реализации может оказаться непосредственно неосуществимым: для его выполнения могут потребоваться предварительные гомеоморфные преобразования. Например, реализация листа Мёбиуса M_1^2 в виде, показанном на рис. 6б и воспроизводящем его рис. 21, не позволяет получить непосредственно минимального клеточного разбиения, отвечающего числам $p_r \pmod 2$ согласно равенствам (2.5.42). Такое разбиение дается реализацией M_1^2, произведенной на рис. 6а.

В заключение данного раздела мы приводим $\overline{p}_r$ и $\overline{p}_r$ (mod 2) для круга с n-дырками R_n^2 и круга с n-дырками, заклеенными листами Мёбиуса M_n^2 (табл. 4 и 5).

Таблица 4
Относительные числа Бетти и коэффициенты кручения для двумерных многообразий с краем

Многообразие	Числа Бетти			Коэффициенты кручения		
	$\overline{p}_0$	$\overline{p}_1$	$\overline{p}_2$	$\overline{m}_0$	$\overline{m}_1$	$\overline{m}_2$
R_n^2	0	n	1	0	0	0
M_2^n	0	$n-1$	0	0	2	0

Таблица 5
Относительные числа Бетти по (mod 2) для двумерных многообразий с краем

Многообразие	Числа Бетти (mod 2)		
	$\overline{p}_0$	$\overline{p}_1$	$\overline{p}_2$
R_n^2	0	n	1
M_n^2	0	n	1

Как и следовало ожидать, $\overline{p}_r$ (mod 2) совпадают для ориентируемых и неориентируемых многообразий.

2.6. Последовательности Майера–Вьеториса и «теоремы сложения» для чисел Бетти

Основой метода получения теорем сложения является использование так называемых *точных последовательностей гомоморфных* отображений нескольких абелевых групп.

Последовательность гомоморфизмов

$$A_1 \xrightarrow{f_{12}} A_2 \xrightarrow{f_{23}} A_3 \tag{2.6.1}$$

называется *точной*, если

$$\operatorname{Im} f_{12} = \operatorname{Ker} f_{23}. \tag{2.6.2}$$