

В заключение данного раздела мы приводим \bar{p}_r и $\bar{p}_r \pmod{2}$ для круга с n -дырками R_n^2 и круга с n -дырками, заклеенными листами Мёбиуса M_n^2 (табл. 4 и 5).

Таблица 4

Относительные числа Бетти и коэффициенты кручения для двумерных многообразий с краем

Многообразие	Числа Бетти			Коэффициенты кручения		
	\bar{p}_0	\bar{p}_1	\bar{p}_2	\bar{m}_0	\bar{m}_1	\bar{m}_2
R_n^2	0	n	1	0	0	0
M_n^2	0	$n - 1$	0	0	2	0

Таблица 5

Относительные числа Бетти по $\pmod{2}$ для двумерных многообразий с краем

Многообразие	Числа Бетти $\pmod{2}$		
	\bar{p}_0	\bar{p}_1	\bar{p}_2
R_n^2	0	n	1
M_n^2	0	n	1

Как и следовало ожидать, $\bar{p}_r \pmod{2}$ совпадают для ориентируемых и неориентируемых многообразий.

2.6. Последовательности Майера–Вьеториса и «теоремы сложения» для чисел Бетти

Основной метода получения теорем сложения является использование так называемых *точных последовательностей гомоморфных отображений* нескольких абелевых групп.

Последовательность гомоморфизмов

$$A_1 \xrightarrow{f_{12}} A_2 \xrightarrow{f_{23}} A_3 \quad (2.6.1)$$

называется *точной*, если

$$\text{Im } f_{12} = \text{Ker } f_{23}. \quad (2.6.2)$$

Здесь $\text{Im } f_{ij}$ — множество элементов A_j , являющихся образами элементов A_i при гомоморфизме f_{ij} ; $\text{Ker } f_{ij}$ — множество элементов A_i , отображаемых в ноль группы A_j при гомоморфизме f_{ij} . Рис. 22 поясняет эти определения

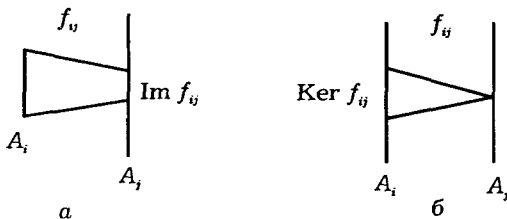


Рис. 22. Иллюстрация $\text{Im } f_{ij}$ (а) и $\text{Ker } f_{ij}$ (б).

Графическая иллюстрация точной последовательности (2.6.1) приведена на рис. 23. Для дальнейшего важна *основная теорема о гомоморфизме*, которая состоит в следующем:

$$A_i / \text{Ker } f_{ij} \cong \text{Im } f_{ij} \quad A_i \xrightarrow{f_{ij}} A_j. \quad (2.6.3)$$

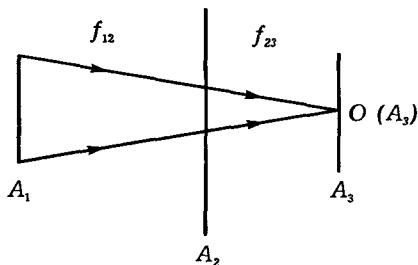


Рис. 23. Точная последовательность $A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow A_3$.

Иначе говоря, если A_j гомоморфна A_i , то элементы A_i , отображаемые в нуль группы A_j , образуют подгруппу и фактор-группа по этой подгруппе изоморфна образу в A_j . Графически это иллюстрируется рис. 24.

С помощью выражения (2.6.3) и цепочки точных последовательностей (2.6.1) можно сделать заключения о структуре одной из групп, входящих в последовательность, если известна структура другой. При-

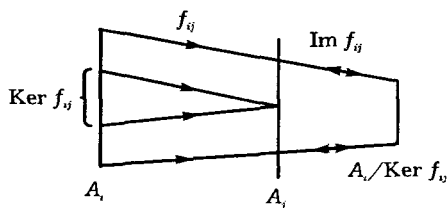


Рис. 24. Иллюстрация основной теоремы о гомоморфизме.

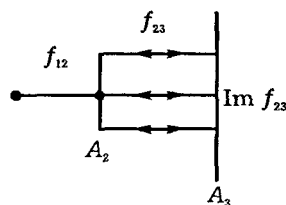


Рис. 25. Точная последовательность $0 \rightarrow A_2 \rightarrow A_3$.

менительно к точным последовательностям гомологических групп это означает, что ранг и коэффициенты кручения одной гомологической группы могут быть вычислены по соответствующим характеристикам другой группы гомологий, входящей в ту же точную последовательность.

Рассмотрим некоторые точные последовательности, полезные при вычислении групп гомологий.

1. Последовательность $0 \xrightarrow{f_{12}} A_2 \xrightarrow{f_{23}} A_3$

В этом случае

$$A_2 \cong \text{Im } f_{23}, \quad (2.6.4)$$

т. е. A_2 отображается изоморфно в некоторую подгруппу A_3 (рис. 25). В самом деле, согласно выражению (2.6.2) $\text{Ker } f_{23} = 0$, т. к. $\text{Im } f_{12} = 0$. Далее

$$A_2 / \text{Ker } f_{23} = A_2 / \{0\} = A_2.$$

Наконец, используя теорему (2.6.3), получаем изоморфизм (2.6.4).

2. Последовательность $A_1 \xrightarrow{f_{12}} A_2 \xrightarrow{f_{23}} 0$.

Для этой последовательности

$$\text{Im } f_{12} = A_2, \quad (2.6.5)$$

т. е. образом A_1 является вся группа A_2 (рис. 26)

Равенство (2.6.5) очевидно, так как $\text{Ker } f_{23} = A_2$, а в силу теоремы (2.6.3) $\text{Im } f_{12} = \text{Ker } f_{23} = A_2$. Заметим, что первый гомоморфизм

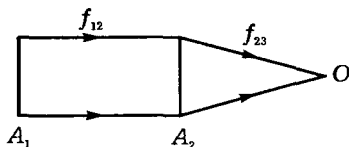


Рис. 26. Последовательность $A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow 0$.

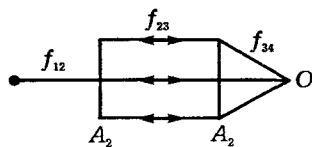


Рис. 27. Последовательность $0 \rightarrow A_2 \rightarrow A_3 \rightarrow 0$.

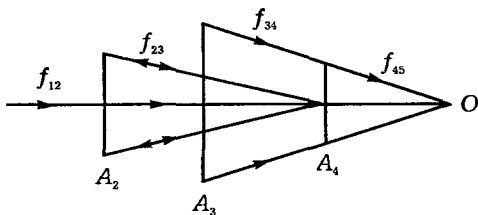


Рис. 28. Последовательность $0 \rightarrow A_2 \rightarrow A_3 \rightarrow A_4 \rightarrow 0$.

в последовательности п. 1 и последний в последовательности п. 2 тривиальны. Поэтому утверждение о точности этих последовательностей равнозначно просто постулированию (2.6.4) для гомоморфизма f_{23} в случае п. 1 и равенства (2.6.5) для гомоморфизма f_{12} в случае п. 2.

3. Последовательность $0 \xrightarrow{f_{12}} A_2 \xrightarrow{f_{23}} A_3 \xrightarrow{f_{34}} 0$.

Предполагается, что (f_{12}, f_{23}) и (f_{23}, f_{34}) есть точные последовательности. Тогда

$$A_2 \cong A_3. \quad (2.6.6)$$

Действительно, последовательность (f_{23}, f_{34}) , согласно равенству (2.6.5) дает

$$\text{Im } f_{23} = A_3,$$

а из последовательности (f_{12}, f_{23}) , согласно изоморфизму (2.6.4), имеем

$$A_2 \cong \text{Im } f_{23} = A_3,$$

т. е. соотношение (2.6.6). Эта последовательность показана на рис. 27.

4. Последовательность $0 \xrightarrow{f_{12}} A_2 \xrightarrow{f_{23}} A_3 \xrightarrow{f_{34}} A_4 \xrightarrow{f_{45}} 0$.

Для этой последовательности (рис. 28)

$$A_3/A_2 \cong A_4. \quad (2.6.7)$$

Данное соотношение устанавливается следующим образом. Из последовательности (f_{34}, f_{45}) и теоремы (2.6.3) следует, что

$$A_3/\text{Ker } f_{34} \cong \text{Im } f_{34} = A_4.$$

Далее, согласно равенству (2.6.2), из последовательности (f_{23}, f_{34}) получаем

$$\text{Im } f_{23} = \text{Ker } f_{34}.$$

Из этих двух равенств следует изоморфизм (2.6.7). Последовательность (f_{12}, f_{23}) , не использованная до сих пор, нужна по той причине, что согласно изоморфизму (2.6.4)

$$\text{Im } f_{23} \cong A_2.$$

Поэтому, если известны A_2 и A_3 , то равенство (2.6.7) дает A_4 .

5. Полезен еще следующий пример.

Рассмотрим цепной комплекс:

$$\xrightarrow{\Delta} L_p \xrightarrow{\Delta} L_{p-1} \xrightarrow{\Delta} L_{p-2} \xrightarrow{\Delta} \dots \quad (2.6.8)$$

Если бы эта последовательность была точна, т. е. $\text{Im } \Delta = \text{Ker } \Delta$, то, согласно определению, группы гомологий H_p такого комплекса были бы тривиальны. Такой комплекс называют *циклическим*. Таким образом, группы гомологий $H_p = \text{Ker } \Delta / \text{Im } \Delta$ характеризуют отклонение последовательности (2.6.8) от точной.

Точные последовательности групп гомологий порождаются гомоморфизмами групп цепей. Существенны три типа гомоморфизмов.

Вложение i_ .* Пусть N и M — два многообразия. Если $N \subset M$ то существует тождественное отображение $i: N \rightarrow M$, которое переводит каждую точку из N в ту же точку, но рассматриваемую как точку в M . При этом, естественно, каждая цепь $L_r(N)$ переходит тождественным образом в цепь $L_r(M)$. Отображение $L_r(N)$ в $L_r(M)$ тождественное с

нулевым ядром. Оно соответствует точной последовательности (2.6.4). Однако порождаемый вложением i гомоморфизм группы гомологий

$$H_r(N) \xrightarrow{i_*} H_r(M)$$

может иметь ненулевое ядро. Гомоморфизм i_* строится следующим образом: берется цикл $c_r(N)$ из некоторого класса $(c_r(N) + B_r(N)) \in H_r(N)$ и рассматривается как представитель класса $(c_r(N) + B_r(M)) \in H_r(M)$. Приведем пример нетривиального ядра $\text{Ker } i_*$.

ПРИМЕР. N — граница круга $R = M$ (рис. 29); N — цикл в N и в M , негомологичный нулю в N и гомологичный нулю в M .

Иначе говоря, $N \not\sim 0$ и $i_*(N + B_1(N)) = B_1(M) \sim 0$ в $H_1(M)$

Проекция (p_*). Группа цепей $L_r(M)$ гомоморфна своей факторгруппе $L_r(M, N) \equiv L_r(M)/L_r(N)$. Этот гомоморфизм

$$L_2(M) \xrightarrow{p} L_2(M, N) \quad (2.6.9)$$

индуцирует гомоморфизм p_* групп гомологий

$$H_2(M) \xrightarrow{p_*} H_2(M, N). \quad (2.6.10)$$

Граничный гомоморфизм Δ_* . Если сопоставить цепи ее границе или часть границы, то мы получим гомоморфные отображения L_r на L_{r-1} . В частности, если $N \subset M$, то цепи на M можно сопоставить часть ее границы, лежащей в N . Гомоморфизм этого типа, называемый граничным, определяется соответствием:

$$L_r(M) \xrightarrow{\Delta} \overset{N}{\Delta} L_r(N) \in L_{r-1}(N), \quad (2.6.11)$$

где символ $\overset{N}{\Delta} L_r$ означает часть границы, содержащейся в $L_{r-1}(N)$, т. е. являющейся цепью на N . Циклу $c_r(M)$ при гомоморфизме Δ отвечает нуль группы $L_{r-1}(N)$.

Покажем, что граничный гомоморфизм Δ порождает гомоморфизм групп гомологий Δ_* :

$$H_r(M, N) \xrightarrow{\Delta_*} H_{r-1}(N). \quad (2.6.12)$$

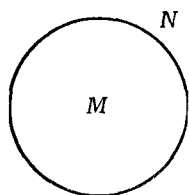


Рис. 29. M — круг с границей N . Цикл N негомологичный нулю в N и гомологичный в M . Иначе говоря, $N \not\sim 0$, $i(N) = N$ и $i_*(N + B_1(N)) = B_1(M) \sim 0$ в $H_1(M)$.

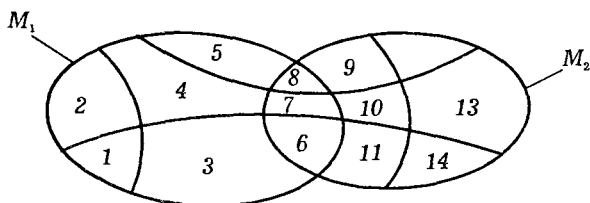


Рис. 30. Клеточное разбиение $M_1 \cup M_2$. Клетки 6, 7, 8 составляют клеточное разбиение $M_1 \cap M_2$. Клетки 1-5 — разбиение $M_1 \setminus (M_1 \cap M_2)$. Клетки 10-14 — разбиение $M_2 \setminus (M_1 \cap M_2)$. Любая цепь на $M_1 \cup M_2$ есть линейная комбинация четырнадцати показанных на рисунке клеток.

Определим $\text{Im } \Delta_*$. Элементами $H_r(M, N)$ являются смежные классы группы $C_r(M, N)$ относительных циклов \bar{c}_r по подгруппе $B_r(M, N)$ относительных циклов \bar{b}_r , гомологичных нулю, т. е. являющихся относительными границами относительных цепей. Подгруппа $B_r(M, N)$ состоит из относительных циклов \bar{b}_r , имеющих вид:

$$\bar{b}_r = \Delta l_{r+1} + L_r(N) \in B_r(M, N).$$

Поскольку Δl_{r+1} есть цикл ($\Delta(\Delta l_{r+1}) = 0$), его образом при граничном гомоморфизме (2.6.11) является нуль. Образами элементов $L_r(N)$ являются их границы, т. е. циклы $b_{r-1}(N)$ из $C_{r-1}(N)$, гомологичные нулю в N . Они образуют подгруппу $B_{r-1}(N)$. Тем самым установлено, что

$$B_r(M, N) \xrightarrow{\Delta} B_{r-1}(N)$$

или

$$O(H_r(M, N)) \xrightarrow{\Delta_*} O(H_{r-1}(N)),$$

как и должно быть при всяком гомоморфизме. Для того, чтобы найти $\text{Im } \Delta_*$, нужно только установить теперь образ негомологичного нуля относительного цикла \bar{c}_r ($\bar{c}_r \neq \bar{b}_r$) при граничном гомоморфизме. Так как

$$\bar{c}_r = l'_r(M) + L_2(N),$$

где $l_r(M)$ — либо цикл ($\Delta l_r(M) = 0$), либо цепь, граница которой лежит в N ($\Delta l_r(M) \in L_{r-1}(N)$), то видно, что образом \bar{c}_r является либо нуль, либо смежный класс, порожденный гомологичным нулем циклом $b'_{r-1}(N) \in L_{r-1}(N)$. Заметим, что хотя цикл $b'_{r-1}(N)$ лежит в N , он может быть гомологичен нулю не обязательно в N , а во всем многообразии M . Иными словами $b'_{r-1}(N)$ может быть границей цепи $l_r(M)$, не принадлежащей $L_r(N)$ ¹³.

Если этот цикл гомологичен нулю в N , т. е. $b'_{r-1}(N) \in B_{r-1}(N)$, то он попадает в нуль группы $H_{r-1}(N)$. Из этого следует, что образом \bar{c}_2 является совокупность циклов $\bar{b}_{r-1}(N)$ из $C_{r-1}(N)$, гомологичных нулю в M , но не обязательно в N . Циклы в N , гомологичные нулю во всем многообразии M , мы будем называть связывающими. В соответствии с изложенным, граничный гомоморфизм (2.6.12) устанавливается соответствием:

$$\begin{aligned} \bar{c}_r + B_r(M, N) &\xrightarrow{\Delta_*} b'_{r-1}(N) + B_{r-1}(N); \\ \bar{c}_r = l_r(M) + L_r(N), b'_{r-1}(N) &= \overset{N}{\Delta} l_r(M), \end{aligned} \quad (2.6.13)$$

где $l_r(M)$ — либо цикл, либо цепь с границей в N . Таким образом, утверждение (2.6.12) доказано.

Совокупность элементов группы гомологий $H_{r-1}(M)$, порождаемых связывающими циклами $b'_{r-1}(N)$, мы будем называть подгруппой гомологий связывающих циклов и обозначать через $H'_{r-1}(N)$. Соответствие (2.6.12) означает, что

$$\text{Im } \Delta_* = H'_{r-1}(N). \quad (2.6.14)$$

Из изложенного, в частности из соответствия (2.6.13), следует,

¹³Пример цикла в N , гомологичного нулю в M , будет показан ниже на рис. 32. В этом примере N есть пересечение двух многообразий M_1 и M_2 , а M — их объединение ($M = M_1 \cup M_2$).

что $\text{Ker } \Delta_*$ составляют относительные циклы \bar{c}_r , порожденные цепями $c_r(M) + l_r(N)$, где $c_r(M)$ — обычный цикл ($\Delta c_r = 0$):

$$\begin{aligned} \text{Ker } \Delta_* &= \{c_r(M) + B_r(M, N)\}; \\ B_r(M, N) &= \{l_r \in L_r(M)/l_r = \Delta l_{r+1} + L_r(N)\}. \end{aligned} \quad (2.6.15)$$

Переходя к точным гомологическим последовательностям, заметим, что алгоритма, автоматически дающего все возможные точки последовательности групп гомологий, не существует, и отыскание таких последовательностей требует определенного искусства. Тем не менее, известен ряд точных последовательностей, полезных для вычисления гомологических групп. К ним относятся последовательности Майера-Вьеториса. Они могут быть использованы для вычисления групп гомологий $H_r(M)$ многообразия

$$M = M_1 \cup M_2$$

по группам гомологий $H_r(M_1)$, $H_r(M_2)$ и $H_r(M_1 \cup M_2)$ (M_1 и M_2 могут пересекаться). Исходным пунктом является точная последовательность цепей

$$0 \longrightarrow L_r(M_1 \cap M_2) \xrightarrow{i} L_r(M_1) \oplus L_r(M_2) \xrightarrow{\bar{i}} L_r(M_1 \cup M_2) \longrightarrow 0, \quad (2.6.16)$$

порождаемая включениями. Чтобы пояснить соответствие (2.6.13), для простоты примем такое клеточное разбиение M и M_1 , чтобы любая цепь на M была равна сумме цепей на $M_1 \setminus (M_1 \cap M_2)$, $M_2 \setminus (M_1 \cap M_2)$ и $(M_1 \cap M_2)$.

Иначе говоря, мы полагаем, что единое клеточное разбиение M дает одновременно клеточное разбиение трех указанных многообразий. Рис. 30 поясняет сказанное.

Во избежание недоразумений подчеркнем, что элементы группы $L_r(M_1) \oplus L_r(M_2)$ представляют собой пары цепей из $L_r(M_1)$ и $L_r(M_2)$:

$$l_r(1, 2) = \{l_r(1), l_r(2)\}.$$

Операция сложения цепей в этой группе определена так, что

$$l_r(1, 2) + l'_r(1, 2) = \{l_r(1) + l'_r(1), l_r(2) + l'_r(2)\},$$

поэтому складывать цепи $L_r(1)$ и $L_r(2)$ в данном случае нельзя (цепь $L_r(1, 2)$) является как бы вектором с компонентами $l_r(1)$ и $l_r(2)$. В отличие от этого, в группе $L_r(M_1 \cup M_2)$ цепи $l_r(1)$ и $l_r(2)$ можно складывать в обычном смысле, так что наряду с каждой из этих цепей, элементами группы является и цепь $l_r(1) + l_r(2)$.

Включения i и \bar{i} определены следующим образом:

$$L_r(M_1 \cap M_2) \xrightarrow{i} \{l_r(M_1 \cap M_2), l_r(M_1 \cap M_2)\} \quad (2.6.17)$$

$$\{l_r(1), l_r(2)\} \xrightarrow{\bar{i}} l_r(1) - l_r(2). \quad (2.6.18)$$

Легко убедиться, что последовательность (2.6.16) точна. Точность первой короткой последовательности ясна, так как непосредственно из включения (2.6.17) следует

$$\text{Im } i \cong L_r(M_1 \cap M_2),$$

что, согласно изоморфизму (2.6.4), означает точность короткой последовательности, начинающейся с нуля. Докажем точность второй короткой последовательности. Из соответствия (2.6.18) следует, что $\text{Ker } \bar{i}$ есть подгруппа цепей $\{l_r(M_1 \cap M_2), l_r(M_1 \cap M_2)\}$, причем согласно включению (2.6.17) она составляет $\text{Im } i$. Таким образом, $\text{Im } i = \text{Ker } \bar{i}$, и этим устанавливается точность второй короткой последовательности. Для установления точности короткой последовательности, оканчивающейся нулем, надо показать, что

$$\text{Im } \bar{i} = L_r(M_1 \cup M_2),$$

Для этого надо убедиться, что любой элемент из $L_r(M_1 \cup M_2)$ может быть представлен в виде $l_r(1) - l_r(2)$ и потому является образом по меньшей мере одного из элементов $\{l_r(1), l_r(2)\} \in L_r(M_1) \oplus L_r(M_2)$. Очевидно, что любая цепь на $M_1 \cup M_2$ однозначно представима в виде:

$$l_r(M_1 \cup M_2) = l_r(M_1) + l_r(M_2 \setminus M_1 \cap M_2), \quad (2.6.19)$$

так как каждое из слагаемых содержит разные клетки, и клеточный базис всей цепи в правой части равенства (2.6.19) включает в себя все клетки разбиения $M_1 \cup M_2$. Вместе с тем

$$l_r(M_1) \in L_r(M_1), \quad -l_r(M_2 \setminus (M_1 \cap M_2)) \in L_r(M_2)$$

и потому произвольная цепь (2.6.19) является, согласно соответствию (2.6.18), образом элемента:

$$\{l_r(M_1), -l_r(M_2 \setminus (M_1 \cap M_2))\} \in L_r(M_1) \oplus L_r(M_2).$$

Этим завершается доказательство точности последовательности (2.6.16).

Перейдем к основной цели этого параграфа. Мы сейчас покажем, что точной последовательности групп цепей (2.6.16) соответствует точная последовательность групп гомологий, так называемая последовательность Майера–Вьеториса:

$$\begin{array}{ccccccc} H_{r+1}(M_1 \cap M_2) & \xrightarrow{\bar{\Delta}_*} & H_r(M_1 \cap M_2) & \xrightarrow{i_*} & & & \\ \xrightarrow{i_*} & H_r(M_1) \oplus H_r(M_2) & \xrightarrow{\bar{i}_*} & H_r(M_1 \cup M_2) & \xrightarrow{\bar{\Delta}_*} & H_{r-1}(M_1 \cap M_2), & \end{array}$$

где i_* и \bar{i}_* — гомоморфизмы включения групп гомологий, а $\bar{\Delta}_*$ — некоторый оператор, который мы построим с помощью граничного гомоморфизма Δ_* (2.6.12). Таким образом, наша задача заключается в построении оператора $\bar{\Delta}_*$ и доказательстве точности последовательности. Обратим внимание на отличие точной последовательности групп цепей (2.6.16) L_r и соответствующей ей последовательности групп гомологий H_r .

Рассмотрим теперь соответствующие группы гомологий. Прежде всего заметим, что группа гомологий $H_r(1 \oplus 2)$ группы цепей $L_r(M_1) \oplus L_r(M_2)$ есть прямая сумма групп $H_r(M_1)$ и $H_r(M_2)$:

$$H_r(1 \oplus 2) \cong H_r(M_1) \oplus H_r(M_2). \quad (2.6.20)$$

Элементами группы являются смежные классы:

$$h_r(1 \oplus 2) = \{c_r(1), c_r(2)\} + \{B_r(1), B_r(2)\}. \quad (2.6.21)$$

Здесь $c_r(1), c_r(2)$ — циклы из $L_r(M_1), L_r(M_2)$, а $B_r(1), B_r(2)$ — подгруппы гомологичных нулю циклов. Парам $\{c_r(1) + b_r(1), c_r(2) + b_r(2)\}$, где $b_r(1) \in B_r(1), b_r(2) \in B_r(2)$ отвечает один и тот же смежный класс. Гомоморфизмы \bar{i} (2.6.18) порождают гомоморфизмы \bar{i}_* групп гомологий

$$H_r(M_1) \oplus H_r(M_2) \xrightarrow{\bar{i}_*} H_r(M_1 \cup M_2) \quad (2.6.22)$$

по закону:

$$\text{Im } \bar{i}_* = \{c_r(1) - c_r(2) + B_r(M_1 \cup M_2)\}. \quad (2.6.23)$$

Отметим, что в отличие от равенства (2.6.19)

$$\text{Im } \bar{i}_* \neq H_r(M_1 \cup M_2), \quad (2.6.24)$$

так как в $M_1 \cup M_2$ имеются, вообще говоря, циклы, не являющиеся циклами ни в $L_r(M_1)$, ни в $L_r(M_2)$ (рис. 31). Поэтому цепи $c_r(1) - c_r(2)$ не исчерпывают всей совокупности негомологичных нулю циклов в $M_1 \cup M_2$.

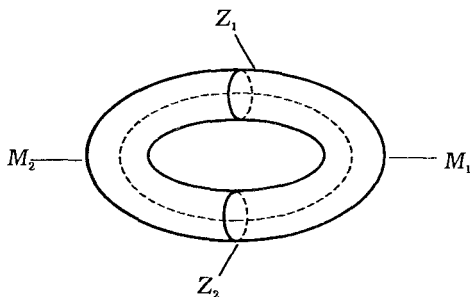


Рис. 31. Пунктирный цикл на торе. $M_1 \cup M_2$ не является циклом ни в M_1 ни в M_2 в отдельности.

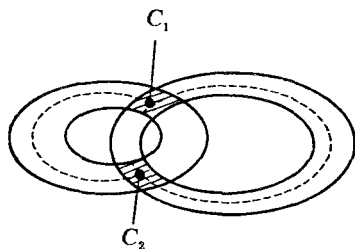


Рис. 32. Нульмерный цикл $c_1 - c_2$ из $M_1 \cap M_2$, негомологичный нулю в $M_1 \cap M_2$, но гомологичный нулю в M_1 и M_2 . Штриховкой показано пересечение $M_1 \cap M_2$; пунктир — цепи из M_1 и M_2 , границей которых является данный цикл.

Установим состав $\text{Ker } \bar{i}_*$. Из выражения (2.6.23) следует, что $\text{Ker } \bar{i}_*$ содержит смежные классы (2.6.21), для которых

$$c_r(1) - c_r(2) = b_r \in B_r(M_1 \cup M_2). \quad (2.6.25)$$

Мы покажем, что $\text{Ker } \bar{i}_*$ есть подгруппа группы (2.6.21), порождаемая циклами

$$c_r(1) = c_r(2) = c_r(M_1 \cap M_2). \quad (2.6.26)$$

Представим $c_r(1)$ и $c_r(2)$ как цепи на M_1 и M_2 в виде:

$$c_r(1) = c_r(\bar{1}) + c_r(M_1 \cap M_2), \quad c_r(2) = c_r(\bar{2}) + c'_r(M_1 \cap M_2), \quad (2.6.27)$$

где $\bar{1}, \bar{2} = M_{1,2} \setminus (M_1 \cap M_2)$. Вообще говоря, слагаемые правой части выражения (2.6.27) не обязательно циклы. Поскольку, однако, разность $c_r(1) - c_r(2)$ гомологична нулю в $B_r(M_1 \cup M_2)$, т. е. является границей некоторой цепи на $M_1 \cup M_2$, мы можем написать:

$$\begin{aligned} c_r(1) - c_r(2) &= b_r = \Delta l_{r+1}; \\ l_{r+1} &= l_{r+1}(\bar{1}) + l_{r+1}(\bar{2}) + l_{r+1}(M_1 \cap M_2). \end{aligned} \quad (2.6.28)$$

Используя дистрибутивность оператора Δ (граница суммы равна сумме границ), имеем

$$b_r = \Delta l_{r+1}(\bar{1}) + \Delta l_{r+1}(\bar{2}) + \Delta l_{r+1}(M_1 \cap M_2). \quad (2.6.29)$$

Все три слагаемых в выражении (2.6.29) — циклы (граница границы равна нулю). Граница $\Delta l_{r+1}(\bar{1})$ может лежать либо в $\bar{1}$, либо в $M_1 \cap M_2$, граница $\Delta l_{r+1}(\bar{2})$ — либо в $\bar{2}$, либо в пересечении $M_1 \cap M_2$, граница $\Delta l_{r+1}(M_1 \cap M_2)$ — в пересечении. В любом случае b_r однозначно представимо в виде:

$$b_r = b_r(\bar{1}) + b_r(\bar{2}) + b_r(M_1 \cap M_2); \quad (2.6.30)$$

здесь уже $b_r(\bar{1}), b_r(\bar{2})$, — циклы, лежащие соответственно в $\bar{1}$ и в $\bar{2}$ и гомологичные нулю в этих многообразиях; $b_r(M_1 \cap M_2)$ — цикл из пересечения, гомологичный нулю в самом пересечении, либо в M_1 или M_2 . Напомним в связи с этим еще раз, что цикл из пересечения $M_1 \cap M_2$, гомологичный нулю в $M_1 \cap M_2$, может не быть гомологичным нулю в $M_1 \cap M_2$. Например, два меридиана z_1, z_2 тора на рис. 31 составляют пересечение $M_1 \cap M_2$, но составленный из них цикл $z_1 + z_2$ не гомологичен нулю в этом пересечении, так как последнее вообще не содержит двумерных цепей и, следовательно, не может содержать и

их границ. Вместе с тем указанный цикл на торе гомологичен нулю в M_1 и в M_2 . Другой пример цикла, лежащего в пересечении, но гомологичного нулю в M_1 , M_2 и негомологичного нулю в $M_1 \cap M_2$, показан на рис. 32. Вернемся, однако к нашей задаче — доказательству равенства (2.6.26). Поставив выражение (2.6.27) и (2.6.30) в первое из равенств (2.6.28), получим

$$\begin{aligned} c_r(\bar{1}) - c_r(\bar{2}) + [c_r(M_1 \cap M_2) - c'_r(M_1 \cap M_2)] = \\ = b_r(\bar{1}) - b_r(\bar{2}) + b_r(M_1 \cap M_2). \end{aligned} \quad (2.6.31)$$

Отсюда следует

$$c_r(\bar{1}) = b_r(\bar{1}), \quad c_r(\bar{2}) = b_r(\bar{2}); \quad (2.6.32)$$

$$c_r(M_1 \cap M_2) - c'_r(M_1 \cap M_2) = b_r(M_1 \cap M_2). \quad (2.6.33)$$

Таким образом

$$\begin{aligned} c_r(1) &= b_r(\bar{1}) + c_r(M_1 \cap M_2); \\ c_r(2) &= b_r(\bar{2}) + c_r(M_1 \cap M_2) - b_r(M_1 \cap M_2). \end{aligned} \quad (2.6.34)$$

Из равенств (2.6.34) следует, во-первых, что $c_r(M_1 \cap M_2)$ — цикл, так как циклами являются $c_r(1)$ и $b_r(1)$; во-вторых, если $b_r(M_1 \cap M_2)$ гомологичен нулю в пересечении или в M_2 , то пары $\{c_r(1), c_r(2)\}$ и $\{c_r(M_1 \cap M_2), c_r(M_1 \cap M_2)\}$ порождают один и тот же смежный класс (2.6.21). Если же $b_r(M_1 \cap M_2)$ гомологичен нулю в M_1 , то перепишав $c_r(1)$ и $c_r(2)$ в форме:

$$\begin{aligned} c_r(1) &= b_r(\bar{1}) + b_r(M_1 \cap M_2) + c'_r(M_1 \cap M_2); \\ c_r(2) &= b_r(\bar{2}) + c'_r(M_1 \cap M_2), \end{aligned} \quad (2.6.35)$$

мы заключаем, что пара $\{c_r(1), c_r(2)\}$ порождает тот же смежный класс (2.6.21), что и пара $\{c'_r(M_1 \cap M_2), c'_r(M_1 \cap M_2)\}$. Тем самым доказано, что все элементы $\text{Ker } \bar{i}_*$ имеют вид:

$$\{c_r(M_1 \cap M_2) + B_r(1), c_r(M_1 \cap M_2) + B_r(2)\} \in \text{Ker } \bar{i}_*. \quad (2.6.36)$$

Формулу (2.6.36), выведенную формальным путем, можно пояснить следующим примером. Тор на рис. 33 представляет собой объединение $M_1 \cup M_2$ двух своих половинок M_1 и M_2 , пересекающихся в

циклах z_1, z_2 . Элемент $\{c_1 + B_1(M_1), c_2 + B_1(M_2)\} \in H_1(M_1) \oplus H_1(M_2)$ при гомоморфизме i_* согласно формуле (2.6.23) переходит в элемент $\{c_1 - c_2 + B_1(M_1 \cup M_2)\} \in H_1(M_1 \cup M_2)$, который, очевидно, гомологичен нулю. Это, на первый взгляд, противоречит формуле (2.6.36), т. к. циклы c_1 и c_2 не принадлежат пересечению $M_1 \cap M_2$. Но на самом деле циклы c_1 и c_2 гомологичны циклу z_1 (или z_2) $\in B_1(M_1 \cap M_2)$. Таким образом, циклы c_1 и c_2 можно заменить гомологичным им циклом $z_1 \in c_1(M_1 \cap M_2)$.

Гомоморфизм цепей i (2.6.17) порождает гомоморфизм i_* групп гомологий $H_r(M_1 \cap M_2)$ и $H_r(M_1) \oplus H_r(M_2)$

$$H_r(M_1 \cap M_2) \xrightarrow{i_*} H_r(M_1) \oplus H_r(M_2) \quad (2.6.37)$$

с законом соответствия

$$\begin{aligned} & c_r(M_1 \cap M_2) + B_r(M_1 \cap M_2) \xrightarrow{i_*} \\ & \xrightarrow{i_*} \{c_r(M_1 \cap M_2) + B_r(M_1 \cap M_2), c_r(M_1 \cap M_2) + B_r(M_1 \cap M_2)\}. \end{aligned} \quad (2.6.38)$$

Сравнивая формулы (2.6.36) и (2.6.38), мы убеждаемся в том, что

$$\text{Im } i_* = \text{Ker } \bar{i}_*. \quad (2.6.39)$$

Это означает, что последовательность

$$H_r(M_1 \cap M_2) \xrightarrow{i_*} H_r(M_1) \oplus H_r(M_2) \xrightarrow{\bar{i}_*} H_r(M_1 \cup M_2) \quad (2.6.40)$$

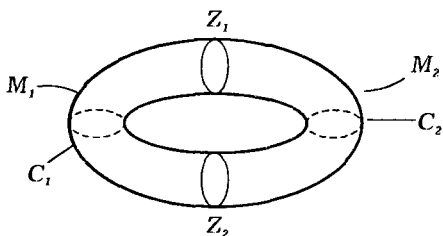


Рис. 33. Иллюстрация формулы (2.6.36).

точна в $H_r(M_1) \oplus H_r(M_2)$.

Найдем ядро гомоморфизма i_* . Из соответствия (2.6.38) следует, что нуль группы $H_r(M_1) \oplus H_r(M_2)$ переходит, во-первых, в нуль группы $H_r(M_1 \cap M_2)$, т. е. в подгруппу $B_r(M_1 \cap M_2)$ циклов $b_r(M_1 \cap M_2)$, гомологичных нулю в пересечении $M_1 \cap M_2$, и, во-вторых, все смежные классы, порожденные циклами $b'_r(M_1 \cap M_2)$,

негомологичными нулю в пересечении, но гомологичными нулю как в 1, так и в 2. Это означает, что ядром гомоморфизма i_* является подгруппа гомологий связывающих циклов $H'_r(M_1 \cap M_2)$, рассмотренная ранее в связи с граничным гомоморфизмом. Итак

$$\text{Ker } i_* = H'_r(M_1 \cap M_2). \quad (2.6.41)$$

Сопоставление этого равенства с равенством (2.6.14) для граничного гомоморфизма наводит на мысль о том, что точная последовательность (2.6.40) может быть продолжена с помощью граничного гомоморфизма. Сначала используем проектирование

$$H_r(M_1 \cup M_2) \xrightarrow{p_*} H_r(M_1, M_1 \cap M_2); \quad (2.6.42)$$

к $H_r(M_1, M_1 \cap M_2)$ можно применить граничный гомоморфизм (2.6.12):

$$H_r(M_1, M_1 \cap M_2) \xrightarrow{\Delta_*} H_{r-1}(M_1 \cap M_2). \quad (2.6.43)$$

в результате мы приходим к гомоморфизму

$$H_r(M_1 \cup M_2) \xrightarrow{\bar{\Delta}_*} H_{r-1}(M_1 \cap M_2), \quad (2.6.44)$$

который является следствием гомоморфизмов (2.6.42) и (2.6.43).

Найдем $\text{Im } \bar{\Delta}_*$. Согласно равенству (2.6.14)

$$\text{Im } \bar{\Delta}_* = H'_{r-1}(M_1 \cap M_2). \quad (2.6.45)$$

При гомоморфизме p_* смежный класс (элемент $H_r(M_1 \cup M_2)$), порождаемый циклом $c_r(M_1 \cup M_2)$, переходит в смежный класс (элемент $H_r(M_1, M_1 \cap M_2)$), порождаемый относительным циклом

$$\bar{c}_r = l_r(M_1) + L_2(M_1 \cap M_2), \quad (2.6.46)$$

где цепь (вообще говоря, не цикл) $l_r(M_1)$ однозначно определена равенством:

$$c_r(M_1 \cup M_2) = l_r(M_1) - l_r(\bar{2}). \quad (2.6.47)$$

Здесь, как и раньше $\bar{2} = M_1 \cup M_2 \setminus M_1$ и $l_r(\bar{2})$ — часть цепи $c_r(M_1 \cup M_2) \in L_r(\bar{2})$. Поскольку c_r — цикл, имеем

$$\Delta l_r(M_1) = \Delta l_r(\bar{2}). \quad (2.6.48)$$

Из этого равенства следует, что

$${}_{M_1 \cap M_2} \Delta l_r(M_1) \in L_{r-1}(M_1 \cap M_2). \quad (2.6.49)$$

Заметим, что границы ${}_{M_1 \cap M_2} \Delta l_r(M_1)$ есть связывающие циклы, поскольку они являются границами одновременно и в M_1 и в M_2 , т. е. гомологичны нулю и в M_1 и в M_2 . Эти связывающие циклы, имеющие размерность $r-1$, порождают подгруппу гомологий связывающих циклов $H'_r(M_1 \cap M_2)$.

При граничном гомоморфизме, элементы $H'_{r-1}(M_1 \cap M_2)$ являются образом смежных классов (элементов $H_r(M_1, M_1 \cap M_2)$), порожденных относительными циклами (2.6.46) (см. соответствие (2.6.13)). Поэтому

$$\text{Im } \bar{\Delta}_* = \text{Im } \Delta_* = H'_{r-1}(M_1 \cap M_2). \quad (2.6.50)$$

Из формул (2.6.41) и (2.6.50) следует, что короткая последовательность

$$H_r(M_1 \cup M_2) \xrightarrow{\bar{\Delta}_*} H_{r-1}(M_1 \cap M_2) \xrightarrow{i_*} H_{r-1}(M_1) \oplus H_{r-1}(M_2) \quad (2.6.51)$$

точна в $H_r(M_1 \cap M_2)$.

Определим теперь $\text{Ker } \bar{\Delta}_*$. Согласно равенствам (2.6.15) $\text{Ker } \Delta_*$ составляют те элементы группы $H_r(M_1, M_1 \cap M_2)$ (2.6.46), у которых цепь $l_r(M_1)$ является циклом, т. е. $\Delta l_r(M_1) = 0$. Тогда из равенства (2.6.47) следует, что цепь $l_r(\bar{2})$ так же является циклом, причем в M_2 . Таким образом, равенство (2.6.47) можно переписать в виде:

$$c_r(M_1 \cup M_2) = c_r(M_1) - c_r(M_2).$$

Это означает, что элементы $H_r(M_1 \cup M_2)$, которые при гомоморфизме $\bar{\Delta}_*$ переходят в нуль группы $H_{r-1}(M_1 \cap M_2)$, имеют вид:

$$c_r(M_1) - c_r(M_2) + B_r(M_1 \cup M_2) \in \text{Ker } \bar{\Delta}_*. \quad (2.6.52)$$

Сравнивая формулы (2.6.52) и (2.6.23), заключаем, что

$$\text{Ker } \bar{\Delta}_* = \text{Im } \bar{i}_*, \quad (2.6.53)$$

т. е. что и короткая последовательность

$$H_r(M_1) \oplus H_r(M_2) \xrightarrow{\bar{i}_*} H_r(M_1 \cup M_2) \xrightarrow{\bar{\Delta}_*} H_{r-1}(M_1 \cap M_2) \quad (2.6.54)$$

является точной в $H_r(M_1 \cup M_2)$. Сводя вместе последовательности (2.6.40), (2.6.51) и (2.6.54) мы получаем последовательность Майера-Вьеториса, точную в каждом звене:

$$\begin{aligned} H_r(M_1 \cap M_2) &\xrightarrow{i_*} H_r(M_1) \oplus H_r(M_2) \xrightarrow{\bar{i}_*} \\ &\xrightarrow{\bar{i}_*} H_r(M_1 \cup M_2) \xrightarrow{\bar{\Delta}_*} H_{r-1}(M_1 \cap M_2) \xrightarrow{i_*} . \end{aligned} \quad (2.6.55)$$

Эта последовательность может быть использована для вычисления $H_r(M_1 \cup M_2)$ по $H_r(M_1)$, $H_r(M_2)$ и $H_{r-1}(M_1 \cap M_2)$. В частности, с помощью последовательности (2.6.55) можно получить теорему сложения для чисел Бетти и эйлеровой характеристики. Вывод этих теорем сложения из точной последовательности (2.6.55) опирается на два факта: основную теорему о гомоморфизме (2.6.3) и связь между рангами абелевой группы, ее подгруппы и фактор-группы по данной подгруппе. Установим эту связь.

Пусть A — свободная группа с конечным числом образующих и B — ее подгруппа. В группе A всегда можно выбрать такой базис, чтобы элементы $a \in A$ и $b \in B \subset A$ были представлены в виде:

$$\begin{aligned} a &= \sum_{i=1}^{R(A)} \alpha_i a_i; & b &= \sum_{j=1}^{R(B)} \beta_j a_j; \\ \alpha_i &\in \mathbb{Z}, \\ \beta_j &\in \mathbb{Z}(m), \quad j = 1, \dots, R(A), \\ \beta_j &\in \mathbb{Z}, \quad j = r+1, \dots, R(B). \end{aligned}$$

Здесь $R(A)$, $R(B)$ — ранги A и B , $\mathbb{Z}(m)$ — группы целых чисел, кратных числам m . Примем, что β_j при $j = 1, \dots, r$, принадлежит $\mathbb{Z}(m)$, вообще говоря, с различными m и что $\beta_j \in \mathbb{Z}$ для $j = r+1, \dots, R(B)$.

Тогда число различных смежных классов по подгруппе B , порожденных элементами

$$\sum_{j=1}^r \alpha_j a_j,$$

конечно. Совокупность этих смежных классов образует конечную подгруппу фактор-группы A/B . Ранг этой подгруппы, очевидно, равен нулю. Далее, смежные классы, представителями которых являются элементы

$$\sum_{j=r+1}^{R(B)} \alpha_j a_j,$$

совпадают с самой подгруппой B . И только смежные классы, определяемые элементами

$$\sum_{i=R(B)+1}^{R(A)} \alpha_i a_i,$$

образуют свободную подгруппу фактор-группы A/B . Ранг этой свободной подгруппы равен $R(A) - R(B)$. Тем самым доказано соотношение

$$R(A/B) = R(A) - R(B). \quad (2.6.56)$$

Мы считали группу A свободной. Если A — группа с кручением k , то A/k — свободная группа. Так как $R(A/k) = R(A)$, то формула (2.6.56) справедлива вообще для любой абелевой группы. Основываясь на соотношениях (2.6.3), (2.6.55) и (2.6.56), получим теперь теорему сложения для чисел Бетти. Согласно выражениям (2.6.3) и (2.6.56), имеем

$$R(H_r(M_1 \cap M_2)) = R(\text{Im } i_*) + R(\text{Ker } i_*) = R(\text{Ker } \bar{i}_*) + R(\text{Ker } i_*). \quad (2.6.57)$$

Последнее равенство обусловлено точностью последовательности Майера–Вьеториса. Действуя аналогично, находим

$$R(H_r(M_1) \oplus H_r(M_2)) = R(\text{Ker } \bar{\Delta}_*) + R(\text{Ker } \bar{i}_*), \quad (2.6.58)$$

$$\begin{aligned} R(H_r(M_1 \cup M_2)) &= R(\text{Ker } i'_*) + R(\text{Ker } \bar{\Delta}_*), \\ i'_* : H_{r-1}(M_1 \cap M_2) &\longrightarrow H_{r-1}(M_1) \oplus H_{r-1}(M_2) \end{aligned} \quad (2.6.59)$$

По определению чисел Бетти $p_r(M)$

$$p_r(M) = R(H_r(M)).$$

Вспоминая далее, что

$$\text{Ker } i'_* = H'_r(M_1 \cap M_2), \quad \text{Ker } i'_* = H'_{r-1}(M_1 \cap M_2), \quad (2.6.60)$$

где $H'_r(M_1 \cap M_2)$ — группы гомологий связывающих циклов, и вводя обозначение:

$$p'_r(M_1 \cap M_2) = R(H'_r(M_1 \cap M_2)), \quad (2.6.61)$$

используя соотношения (2.6.57), (2.6.58) и (2.6.59), мы приходим к окончательной формуле:

$$\begin{aligned} p_r(M_1 \cup M_2) &= p_r(M_1) + p_r(M_2) - p_r(M_1 \cap M_2) + \\ &+ p'_r(M_1 \cap M_2) + p'_{r-1}(M_1 \cap M_2). \end{aligned} \quad (2.6.62)$$

Это и есть формула сложения для чисел Бетти. Она выражает числа Бетти всего многообразия $M_1 \cup M_2$ через числа Бетти подмногообразий M_1 , M_2 , $M_1 \cap M_2$ и ранги групп связывающих циклов $p'_r(M_1 \cap M_2)$ и $p'_{r-1}(M_1 \cap M_2)$.

Из формулы сложения для чисел Бетти (2.6.62) следует простая формула сложения для эйлеровой характеристики χ , определяемая формулой (2.3.7). Чтобы получить эту формулу, заметим прежде всего, что если размерность многообразия есть n ($r \leq n$), то

$$p'_n(M_1 \cap M_2) = 0, \quad (2.6.63)$$

так как циклы максимальной размерности n не могут быть гомологичными нулю (нет циклов размерности $n+1$, границами которых могли бы быть рассматриваемые циклы). Умножая формулу (2.6.62) на $(-1)^r$ и складывая все равенства, начиная с $r = n$ и кончая $r = 0$, получим, с учетом равенства (2.6.63) искомое соотношение:

$$\chi(M_1 \cup M_2) = \chi(M_1) + \chi(M_2) - \chi(M_1 \cap M_2). \quad (2.6.64)$$

Из выражения (2.6.62) и (2.6.64) следуют очевидные формулы: если $M_1 \cap M_2 = \emptyset$, то

$$\begin{aligned} p_r(M_1 \cup M_2) &= p_r(M_1) + p_r(M_2), \\ \chi(M_1 \cup M_2) &= \chi(M_1) + \chi(M_2). \end{aligned}$$

Формулы сложения (2.6.62) и (2.6.64) входят в рабочий аппарат приложений теории гомологий к рассматриваемым в данном курсе вопросам теории функций. Поэтому с нетривиальными примерами практического применения формул сложения мы встретимся несколько позже (см. раздел, посвященный теории Морса). Здесь же мы приведем несколько наглядных примеров главным образом для того, чтобы освоиться с числами p'_r — рангами групп связывающих циклов.

ПРИМЕР 1. $M_1 \cup M_2 = S^2$, $M_1, M_2 = R_0^2$ (круг), $M_1 \cap M_2 = S^1$.

В этом случае пересечение одномерно и в нем имеется единственный связывающий цикл — окружность S^1 , являющаяся границей M_1 и границей M_2 . Таким образом

$$p'_0 = 0, \quad p'_1 = 1. \quad (2.6.65)$$

Первое из равенств (2.6.65) имеет место потому, что все связывающие нульмерные циклы гомологичны нулю и в пересечении, т. е. попадают в нуль группы $H'_0(M_1 \cap M_2)$.

Далее имеем

$$p_0(R_0^2) = 1, \quad p_1(R_0^2) = p_2(R_0^2) = 0, \quad p_0(S^1) = p_1(S^1) = 1, \quad p_2(S^1) = 0. \quad (2.6.66)$$

Подставив равенства (2.6.65) и (2.6.66) в формулу (2.6.62), получим

$$p_0(S^2) = p_2(S^2) = 1, \quad p_1(S^2) = 0$$

в соответствии с табл. 1 раздела 2.3.

ПРИМЕР 2. $M_1 \cup M_2 = P_1$ (двумерный тор) $M_1, M_2 = R_1^2$ (круговое кольцо), $M_1 \cap M_2 = S^1 \cup S^1$ (два меридиана тора — см. рис. 31).

В данном примере

$$p'_0 = 1, \quad p'_1 = 1, \quad (2.6.67)$$

хотя на первый взгляд кажется, что $p'_1 = 2$, поскольку пересечение содержит две окружности. В действительности же связывающий цикл — это цепь, в которую обе окружности входят с равными или противоположными по знаку (в зависимости от выбранной ориентации цикла) коэффициентами. Каждая из окружностей в отдельности не является границей ни в M_1 , ни в M_2 ; границами M_1 и M_2 являются только обе окружности вместе, подобно тому, как границами отрезка являются две точки, а не каждая из них в отдельности. Таким образом, одномерная подгруппа гомологий в связывающих циклах имеет в данном случае один базисный связывающий цикл и ее ранг равен единице. Ранг группы нульмерных связывающих циклов ясен уже из минимального клеточного разбиения $M_1 \cap M_2$: оно содержит по одной точке на каждой из окружностей. Эти две точки, взятые с равными или противоположными по знаку коэффициентами и составляют единственный базисный связывающий нульмерный цикл. Таким образом, ранг $H_0(M_1 \cap M_2)$ также равен единице.

Воспользовавшись формулой (2.6.62), найдем числа Бетти кругового кольца R_1^2 . Мы имеем

$$2p_r(R_1^2) = p_r(M_1 \cup M_2) + p_r(M_1 \cap M_2) - p'_r - p'_{r-1}. \quad (2.6.68)$$

Поставив сюда выражение (2.6.67), $p_r(M_1 \cup M_2)$ из табл. 1 и

$$p_0(M_1 \cap M_2) = p_1(M_1 \cap M_2) = 2, \quad p_2(M_1 \cap M_2), \quad (2.6.69)$$

получим

$$p_0(R_1^2) = p_1(R_1^2) = 1, \quad p_2(R_1^2) = 0. \quad (2.6.70)$$

Этот пример показывает, как, пользуясь формулой сложения для чисел Бетти, можно вычислять группы гомологий для многообразий с краем, пользуясь только числами Бетти для замкнутых многообразий, т. е. в двумерном случае, только простой табл. 1.

ПРИМЕР 3. $M_1 \cup M_2 = R_0^3$ (трехмерный шар), $M_1, M_2 = R_0^3$, $M_1 \cap M_2 = R_0^2$ (круг).

Поскольку в данном случае $H_r(M_1 \cup M_2) = H_r(M_1) = H_r(M_2)$, формула (2.6.62) дает

$$p_r(R_0^3) = p_r(R_0^2) - p'_r(M_1 \cap M_2) - p'_{r-1}(M_1 \cap M_2). \quad (2.6.71)$$

Почти очевидно, что

$$p'_0 = p'_1 = p'_2 = 0. \quad (2.6.72)$$

Некоторого пояснения, пожалуй, требует лишь равенство $p'_1 = 0$: на первый взгляд, кажется, что имеется одномерный связывающий цикл — граница круга. Но этот цикл гомологичен нулю в $M_1 \cap M_2$ и поэтому не дает вклада в ранг группы гомологий связывающих циклов. Таким образом

$$\begin{aligned} p_r(R_0^3) &= p_r(R_0^2), \quad r = 0, 1, 2; \\ p_3(R_0^3) &= 0. \end{aligned} \quad (2.6.73)$$

ПРИМЕР 4. $M_1 \cup M_2 = R_0^n$ (n -мерный шар), $M_1, M_2 = R_0^n$, $M_1 \cap M_2 = R_0^{n-1}$ ($(n-1)$ -мерный шар).

Так же, как и в предыдущем примере

$$p'_0 = p'_1 = \dots = p'_n = 0$$

и формула (2.6.71) с заменой $R_0^3 \rightarrow R_0^n$, $R_0^2 \rightarrow R_0^{n-1}$ дает рекуррентное соотношение, из которого следует

$$p_0(R_0^n) = 1, p_1(R_0^n) = \dots = p_r(R_0^n) = 0. \quad (2.6.74)$$

Из выражения (2.6.74) следует, что эйлерова характеристика n -мерного шара равна

$$\chi(R_0^n) = 1. \quad (2.6.75)$$

ПРИМЕР 5. $M_1 \cup M_2 = S^n$, $M_1, M_2 = R_0^n$, $M_1 \cap M_2 = S^{n-1}$.

В этом случае имеем

$$p'_0 = p'_1 = \dots = p'_{n-2} = p'_n = 0, \quad p'_{n-1} = 1,$$

так как всякий цикл в сфере $S^{n-1} = M_1 \cap M_2$ гомологичен нулю в $M_1 \cap M_2$.

Формула (2.6.62) с учетом выражения (2.6.74) дает, при $n \neq 1$

$$p_0(S^n) = 2 - p_0(S^{n-1}); \quad (2.6.76)$$

$$p_1(S^n) = -p_1(S^{n-1}) = 0, \dots, p_{n-2}(S^n) = -p_{n-2}(S^{n-1}) = 0; \quad (2.6.77)$$

$$p_{n-1}(S^n) = 1 - p_{n-1}(S^{n-1}); \quad (2.6.78)$$

$$P_n(S^n) = 1. \quad (2.6.79)$$

Из этих соотношений получаем следующие числа Бетти:

$$p_0(S^n) = p_n(S^n) = 1, \quad p_1(S^n) = \dots = p_{n-1}(S^n) = 0. \quad (2.6.80)$$

Из выражения (2.6.80) следует приведенная ранее формула Пуанкаре для эйлеровой характеристики n -мерной сферы $\chi(S^n)$ (см. разд. (2.2):

$$\chi(S^n) = 1 + (-1)^n. \quad (2.6.81)$$

Примеры 3–5 показывают, каким образом формулы сложения для чисел Бетти (2.6.62) может быть использована для вычисления гомологических групп многообразий высших размерностей. Аналогичным образом, например, могут быть вычислены группы гомологий n -мерного шарового слоя (кольца), n -мерного тора, n -мерного тороидального слоя и др.

ПРИМЕР 6. $M_1 \cup M_2 = R_0^n$ (n -мерный шар), $M_1 = R_1^n$ (n -мерный шаровой слой).

Вычислим $p_r(R_1^n)$. В данном случае

$$p'_r = 0,$$

так как единственным связывающим циклом могла бы быть S^{n-1} , но она не гомологична нулю в M_1 (граница R_1^n — две сферы S^{n-1}).

Формула (2.6.62) дает

$$\begin{aligned} p_r(R_1^n) &= p_r(S^{n-1}), \quad r = 0, \dots, n-1, \\ p_n(R_1^n) &= 0. \end{aligned} \quad (2.6.82)$$

Обратим внимание на следующее обстоятельство. В случае $n = 2$ гомеоморфность кругового кольца и боковой поверхности цилиндра, т. е. сферы с двумя дырками, очевидна (наглядна деформация, переводящая одно многообразие в другое). В общем случае шаровой слой и сфера с двумя дырками также гомеоморфны. Это легко усмотреть из того, что шар и сфера с дыркой гомеоморфны. Таким образом, числа Бетти шарового слоя и сферы с двумя дырками совпадают.

ПРИМЕР 7. $M_1 \cup M_2 = P_1^n$ (n -мерный тор), $M_1, M_2 = R_1^n$, $M_1 \cap M_2 = S^{n-1} \cup S^{n-1}$.

Эти формулы отвечают тому, что n -мерный тор представляет собой две склеенные n -мерные трубки (две сферы S^n с двумя дырками, ограниченными S^{n-1}). Название n -мерный тор для такой фигуры соответствует прямому обобщению уравнения обычного тора:

$$(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + R^2 - r^2)^2 - 4R^2(x_1^2 + x_2^2) = 0 \quad (2.6.83)$$

в уравнение:

$$(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n+1}^2 + R^2 - r^2)^2 - 4R^2(x_1^2 + \dots + x_n^2) = 0 \quad (2.6.84)$$

для n -мерного тора. Пересечение тора (2.6.83) с плоскостью $x_3 = 0$ состоит из двух окружностей $x_1^2 + x_2^2 = (R \pm r)^2$. Аналогично этому пересечению n -мерного тора (2.6.84) с n -мерной плоскостью $x_{n+1} = 0$ содержит две сферы S^{n-1}

$$x_1^2 + \dots + x_n^2 = (R \pm r)^2. \quad (2.6.85)$$

В обоих случаях плоскость делит многообразие на два шаровых слоя, уравнения которых получаются присовокуплением к уравнению (2.6.84) неравенств:

$$x_{n+1} > 0, \quad x_{n+1} < 0;$$

границу же каждого из них составляют две сферы S^{n-1} , определяемые уравнением (2.6.85). Ранги групп связывающих циклов определяются равенствами:

$$p'_0 = p'_{n-1} = 1, \quad p'_1 = p'_2 = \dots = p'_{n-2} = p'_n = 0. \quad (2.6.86)$$

Действительно, всякий цикл в $M_1 \cap M_2 = S^{n-1} \cup S^{n-1}$ размерности $0 < r < n-1$ есть цикл на сфере и гомологичен нулю в пересечении. Связывающими же циклами являются двухточечный нульмерный цикл (по одной точке на каждой сфере) и $n-1$ -мерный цикл, состоящий из двух сфер S^{n-1} с равными или противоположными по знаку коэффициентами.

Используя выражения (2.6.82) и (2.6.86), получаем формулу для чисел Бетти $p_r(P_1^n)$ n -мерного тора:

$$p_r(P_1^n) = \delta_{r,0} + \delta_{r,n-1} + \delta_{r-1,0} + \delta_{r-1,n-1}.$$

Для всех n , кроме $n = 2$, эта формула дает

$$\begin{aligned} p_0(P_1^n) = p_1(P_1^n) = p_{n-1}(P_1^n) = p_n(P_1^n) = 1; \\ p_r(P_1^n) = 0, \quad r \neq 0, 1, n-1, n. \end{aligned} \quad (2.6.87)$$

В особом же случае, при $n = 2$, получаем знакомый результат (см. табл. 1):

$$p_0(P_1^2) = p_2(P_1^2) = 1, \quad p_1(P_1^2) = 2.$$

Заметим, что $\chi(P_1^n) = 0$ при любом n (здесь χ как и раньше χ — эйлерова характеристика).

Аналогичным образом могут быть вычислены группы гомологий m -мерных кренделей P_m^n (n -мерной сферы с m ручками).

Последовательное применение формул (2.6.62) («склеивание» двух торов с дыркой, кренделя P_2^n с дыркой с тором с дыркой и т. д.) приводит к следующему результату:

$$\begin{aligned} p_0(P_m^n) = p_n(P_m^n) = 1, \quad p_1(P_m^n) = p_{n-1}(P_m^n) = m, \\ p_r(P_m^n) = 0, \quad r \neq 0, 1, n-1, n. \end{aligned} \quad (2.6.88)$$

Исключительным снова является случай $n = 2$, когда $n - 1 = 1$, и соответствующие числа Бетти складываются, откуда $p_1(P_m^2) = 2m$ — старый результат табл. 1.

Подчеркнем, что в отличие от двумерных кренделей n -мерные крендели не исчерпывают все замкнутые ориентируемые поверхности без самопересечений. Можно обратить также внимание на то, что в формулы (2.6.88) демонстрируют справедливость теоремы двойственности Пуанкаре для n -мерных ориентируемых многообразий.

ПРИМЕР 8. $M_1 \cup M_2 = N_1$ (проективная плоскость), $M_1 = R_0^2$, $M_2 = M_1^2$ (лист Мёбиуса), $M_1 \cap M_2 = S^1$.

В этом примере очевидно, что

$$P'_0 = 0, \quad (2.6.89)$$

но не вполне тривиально, что

$$P_1 = 0 \quad (2.6.90)$$

так как, на первый взгляд, кажется, что пересечение $M_1 \cap M_2 = S^1$ гомологично нулю в $M_2 = M_1^2$, либо эта окружность является краем листа Мёбиуса. В действительности же границей клеточного разбиения листа Мёбиуса является сумма двух циклов, и край есть лишь одно из слагаемых этой суммы (см. формулу (2.5.26) и рис. 21, где край обозначен буквой b_1) и сам по себе не равен границе двумерной цепи в M_2 . Остальные вычисления по формуле (2.6.62) трудности не составляют. Исходя из $p_r(N_1)$, $p_r(R_0^2)$, $p_r(S^1)$ получаем числа Бетти листа Мёбиуса:

$$p_0(M_1^2) = p_1(M_2^2) = 1, \quad p_2(M_1) = 0. \quad (2.6.91)$$

Заметим, что формула (2.6.62), как ясно из ее вывода, справедлива и для чисел Бетти по $\text{mod } 2$. В отличие от выражения (2.6.90), в этом случае

$$p'_1 \pmod{2} = 1, \quad (2.6.92)$$

так как второе слагаемое в формуле (2.5.26), взятое по $\text{mod } 2$, равно нулю. Числа Бетти листа Мёбиуса по $\text{mod } 2$ получаются такими же, как обычно (формула (2.6.91)), за счет того, что при переходе к $\text{mod } 2$ меняется не только P'_1 , но и $P_r(N_1)$ ($p_r(N_1) \pmod{2} = 1$ для всех r , см. табл. 2)

ПРИМЕР 9. $M_1 \cup M_2 = P'_1 \cup M^2$ (тор с листом Мёбиуса), $M_1 = P'_1$ — тор с дыркой, $M_2 = M_1^2$, $M_1 \cap M_2 = S^1$.

Связывающие циклы такие же, как и в предыдущем примере (формулы (2.6.89), (2.6.90)). Для вычисления $p_r(M_1 \cup M_2)$ надо предварительно найти $p_r(P_1^1)$. Эти числа находятся в формуле (2.6.62) применительно к многообразиям:

$$M_1 \cup M_2' = P_1, \quad M_1 = P_1^1, \quad M_2' = R_0^2, \quad M_1 \cap M_2' = S^1,$$

причем в этом случае $p'_0 = 0$, $p'_1 = 1$. В итоге получаем

$$p_0(P_1^1) = 1, \quad p_1(P_1^1) = 2, \quad p_2(P_1^1) = 0. \quad (2.6.93)$$

Учитывая выражение (2.6.93), по теореме сложения находим

$$p_0(M_1 \cup M_2) = 1, \quad p_1(M_1 \cup M_2) = 2, \quad p_2(M_1 \cup M_2) = 0. \quad (2.6.94)$$

Замкнутая поверхность с такими числами Бетти гомеоморфна сфере с тремя листами Мёбиуса — N_3 (см. табл. 1).

ПРИМЕР 10. Числа Бетти « n -мерного листа Мёбиуса». n -мерный лист Мёбиуса M_1^n определяем следующим образом:

$$R_0^n \cup M_1^n = N_1^n, \quad R_0^n \cap M_1^n = S^{n-1} \quad (2.6.95)$$

т. е. объединение n -мерного шара R_0^n и M_1^n дает n -мерную проективную плоскость N_1^n .

Используя формулу сложения (2.6.62) и соотношения (2.6.95), можно вычислить $p_r(M_1^n)$ по числам $p_r(R_0^n)$, $p_r(S^{n-1})$ и $p_r(N_1^n)$. Числа Бетти шара и сферы были вычислены нами ранее. Найдем числа Бетти $p_r(N_1^n)$ n -мерной проективной плоскости.

Проективное пространство n измерений — это пространство, точками которого являются прямые евклидова $n + 1$ -мерного пространства, проходящее через начало координат. Всякая такая прямая определяется координатами $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{n+1}$, какой-нибудь одной своей точки, кроме начала координат, а все точки прямой имеют координаты $\lambda x_1, \dots, \lambda x_{n+1}$, $-\infty < \lambda < +\infty$. Совокупность чисел $x = (x_1, \dots, x_{n+1})$ есть, таким образом, координаты точки $n + 1$ -мерного проективного пространства, причем точки x и λx тождественны. Мы будем обозначать координаты точки $n + 1$ -мерного проективного пространства буквами

$$\xi = (\xi_1, \dots, \xi_{n+1}).$$

Согласно сказанному выше, эти числа задаются с точностью до общего множителя ($\xi_i = \lambda \bar{x}_i$). Легко установить гомеоморфность области n -мерного проективного пространства, содержащей точки с координатой $\xi_{n+1} \neq 0$, евклидову n -мерному пространству. Указанный гомеоморфизм устанавливается равенствами:

$$x_i = \frac{\xi_i}{\xi_{n+1}}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.6.96)$$

Для случая $n + 1 = 2$ этот гомеоморфизм иллюстрируется рис. 34.

Равенство (2.6.96) при $\xi_{n+1} \neq 0$ сопоставляет каждой точке $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_{n+1})$ точку $x = (x_1, \dots, x_n)$. Напротив, каждой точке $x = (x_1, \dots, x_n)$ при $\xi_{n+1} \neq 0$ однозначно соответствует точка $\xi = (x_1, \dots, x_n, 1)$. Однозначность соответствия $x \rightarrow \xi$ нарушается при $\xi_{n+1} = 0$; в этом случае точкам λx отвечает одна точ-

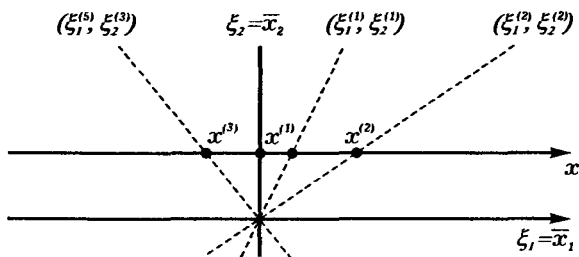


Рис. 34. Соответствие между точками $\xi_2 \neq 0$ двумерного проективного пространства (ξ_1, ξ_2) и одномерного евклидова пространства x .

ка проективного пространства $\xi = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n, 0)$, поскольку кратные координаты ξ и λ определяют в проективном пространстве одну точку. Рассмотрим теперь простейшее клеточное разбиение n -мерной проективной плоскости. Клеткой n -измерений, т. е. многообразием, гомеоморфным открытому n -шару, является, очевидно, вся проективная плоскость за вычетом граничного многообразия $(\xi_1, \dots, \xi_n, 0)$, отвечающего бесконечно удаленным точкам. Клетка a_{n-1} размерности $n-1$ есть многообразие $(\xi_1, \dots, \xi_n \neq 0, 0)$; многообразие же $(\xi_1, \dots, \xi_n = 0, 0)$ является граничным многообразием клетки a_{n-1} . Продолжая эту процедуру далее, мы приходим к следующему заключению: n -мерная проективная плоскость разбивается на $n+1$ клеток по одной клетке a_r каждой размерности $r = 0, 1, \dots, n$. При этом формула клеточного разбиения такова:

$$a_r = (\xi_1, \dots, \xi_r \neq 0, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-r}). \quad (2.6.97)$$

Из этого следует, что все цепи $L_r(N_1)$ одночленные:

$$l_r(N_1^n) = \alpha_r a_r. \quad (2.6.98)$$

Для вычисления $H_r(N_1^n)$ требуется вычислить только Δa_r . Геометрической границей клетки a_r является сфера S^{r-1} . Но так как двум диаметрально противоположным ее точкам отвечает одна и та же точка проективной плоскости, то

$$\Delta a_r = S^{r-1} + \varepsilon_{r-1} S^{r-1}, \quad (2.6.99)$$

где ϵ_{r-1} — коэффициент инцидентности. Этот коэффициент равен ± 1 в зависимости от того, имеют ли отождествляемые диаметрально противоположные участки S^{r-1} (клетки) одинаковую ориентацию ($\epsilon_r = +1$) или противоположную ($\epsilon_r = -1$). Напомним, что клетки считаются ориентированными одинаково или противоположно, если системы декартовых осей на них переводятся друг в друга преобразованиями с детерминантами $+1$ или -1 соответственно. Детерминант преобразований $x \rightarrow -x$ ($x \in S^{r-1}$) равен $+1$, если r четно и -1 , если r нечетно. Таким образом

$$\epsilon_{r-1} = (-1)^r \quad (2.6.100)$$

и

$$\Delta a_r = (1 + (-1)^r) S^{r-1}. \quad (2.6.101)$$

Иначе говоря, все цепи нулевой и нечетных размерностей являются циклами ($\Delta I_r = 0$, r нечетно), цепи же четной размерности циклами не являются ($\Delta I_r \neq 0$, r четно). Отсюда следует, что группы размерности $c_r(N_1^n) = 0$ отсутствуют и, таким образом,

$$H_r(N_1^n) \cong 0, \quad r = 0, 2, 4, \dots, r < n. \quad (2.6.102)$$

Среди циклов нечетной размерности гомологичны нулю те, у которых коэффициенты α_r в выражении (2.6.98) являются четными числами (см. равенство (2.6.101)). В итоге получаем

$$H_r(N_1^n) \cong \mathbb{Z}_2, \quad r = 1, 3, \dots, r < n. \quad (2.6.103)$$

Наконец,

$$H_n(N_1^n) = \begin{cases} 0 & n \text{ — четно,} \\ \mathbb{Z} & n \text{ — нечетно;} \end{cases} \quad (2.6.104)$$

$$H_0(N_1^n) = \mathbb{Z}.$$

Формулы (2.6.102)–(2.6.104) приводят к следующим значениям $p_r(N_1^n)$:

$$\begin{aligned} p_0(N_1^n) &= 1, \\ p_r(N_1^n) &= 0, \quad 0 < r < n, \\ p_n(N_1^n) &= \frac{1}{2}(1 + (-1)^{n+1}). \end{aligned} \quad (2.6.105)$$

Легко подсчитать группы гомологий $H_r(N_1^n)$ по mod 2.

Для чисел Бетти имеем

$$p_r(N_1^n) \pmod{2} = 1, \quad r = 0, 1, \dots, n. \quad (2.6.106)$$

Для вычисления $p_r(M_1^n)$ по схеме (2.6.95) с помощью формулы сложения (2.6.62) нужно только установить ранги p'_r подгрупп гомологий связывающих циклов. Единственный же гомологичный нулю цикл, лежащий в пересечении — это само пересечение, т. е. сфера S^{n-1} . Она гомологична нулю в R_0^n , но она негомологична нулю в M_1^n , если $n-1$ нечетное число. Таким образом

$$p'_r = \begin{cases} 0 & n \text{ — четно,} \\ \delta_{r,n-1} & n \text{ — нечетно.} \end{cases} \quad (2.6.107)$$

Используя теперь формулу (2.6.62), находим

$$p_r(M_1^n) = \begin{cases} 1 & r = 0, \\ 0 & 0 < r < n - 2, \\ 1 - \frac{1}{2}(1 + (-1)^{n+1}) & r = n - 1, \\ 0 & r = n. \end{cases} \quad (2.6.108)$$

Числа Бетти n -мерного листа Мёбиуса по mod 2 вычисляются также, с той лишь разницей, что $p'_r = \delta_{r,n-1}$ вне зависимости от четности n . Тогда мы получаем

$$P_r(M_1^n) \pmod{2} = \begin{cases} 1, & 0 \leq r \leq n, \\ 0, & r = n. \end{cases} \quad (2.6.109)$$

Зная $p_r(N_1^n)$ и $p_r(M_1^n)$, с помощью теоремы сложения (2.6.62) можно легко найти числа Бетти других n -мерных не ориентируемых многообразий типа n -мерной сферы с t листами Мёбиуса M_1^n и т. п.

Заметим, что топологические свойства n -мерных проективных и неориентируемых многообразий могут иметь непосредственное значение для физических приложений. Это относится, во-первых, к объектам типа монополя Дирака или солитоноподобных решений с топологическим зарядом и, во-вторых к релятивистским волновым функциям

системы нескольких частиц на «световом фронте» (так называется многовременная волновая функция, становящаяся одновременной на световом конусе $x_0^2 - \bar{x}^2 = 0$). К этим проблемам мы вернемся позже.

В заключение отметим, что существуют последовательности Майера–Вьеториса для групп относительных гомологий:

$$\begin{aligned} H_r(M, M_1 \cap M_2) \xrightarrow{i_*} H_r(M, M_1) \oplus H_r(M, M_2) \xrightarrow{\bar{i}_*} \\ \xrightarrow{\bar{i}_*} H_r(M, M_1 \cup M_2) \xrightarrow{\bar{\Delta}_*} H_{r-1}(M, M_1 \cup M_2) \xrightarrow{i_*} . \end{aligned} \quad (2.6.110)$$

Этой последовательности отвечает формула сложения относительных чисел Бетти, аналогичная формуле (2.6.62).

В формуле (2.6.110) $M \neq M_1 \cup M_2$. Многообразие $M_1 \cup M_2 \subset M$, т. е. является подмногообразием многообразия M . Формула (2.6.110) дает возможность, в частности, вычислять группы относительных гомологий для многообразий с краем, когда структура последнего сложна и край состоит из подмногообразий M_1 и M_2 .

Как уже указывалось, последовательностями Майера–Вьеториса не исчерпываются точные последовательности групп гомологий, которые в конкретных случаях могут оказаться полезными для вычисления этих групп. Содержательный материал по этому вопросу имеется в книге Дольда [13].

2.7. Когомологии

Мы дадим здесь понятие о когомологиях, рассматривая этот аппарат в той мере, в какой он связан с аппаратом гомологий, и, разумеется, поясняя его существенное содержание («физический смысл», как мы бы сказали, если бы речь шла о физической теории).

Ранее уже подчеркивалась аналогия между группами цепей и векторными пространствами. Развивая эту аналогию, мы можем ввести «пространство» *коцепей* L^p , сопряженное «пространству» цепей L_p . Для этого временно (в настоящем разделе) воспользуемся обозначениями Дирака. Будем рассматривать элемент группы цепей L_p как кет-вектор $|b_p\rangle \in L_p$. Сопряженные бра-векторы образуют так называемые *коцепи*.