системы нескольких частиц на «световом фронте» (так называется многовременная волновая функция, становящаяся одновременной на световом конусе $x_0^2 - \overline{x}^2 = 0$). К этим проблемам мы вернемся позже.

В заключение отметим, что существуют последовательности *Майера–Вьеториса* для *групп относительных гомологий*:

$$\begin{aligned} &H_r(M,\, M_1 \cap M_2) \xrightarrow{i_*} H_r(M,\, M_1) \oplus H_r(M,\, M_2) \xrightarrow{\bar{i}_*} \\ &\xrightarrow{\bar{i}_*} H_r(M,\, M_1 \cup M_2) \xrightarrow{\overline{\Delta}_*} H_{r-1}(M,\, M_1 \cup M_2) \xrightarrow{i_*} . \end{aligned} \tag{2.6.110}$$

Этой последовательности отвечает формула сложения относительных чисел Бетти, аналогичная формуле (2.6.62).

В формуле (2.6.110) $M \neq M_1 \cup M_2$. Многообразие $M_1 \cup M_2 \subset M$, т. е. является подмногообразием многообразия M. Формула (2.6.110) дает возможность, в частности, вычислять группы относительных гомологий для многообразий с краем, когда структура последнего сложна и край состоит из подмногообразий M_1 и M_2.

Как уже указывалось, последовательностями Майера–Вьеториса не исчерпываются точные последовательности групп гомологий, которые в конкретных случаях могут оказаться полезными для вычисления этих групп. Содержательный материал по этому вопросу имеется в книге Дольда [13].

2.7. Когомологии

Мы дадим здесь понятие о когомологиях, рассматривая этот аппарат в той мере, в какой он связан с аппаратом гомологий, и, разумеется, поясняя его существенное содержание («физический смысл», как мы бы сказали, если бы речь шла о физической теории).

Ранее уже подчеркивалась аналогия между группами цепей и векторными пространствами. Развивая эту аналогию, мы можем ввести «пространство» *коцепей* L^p, сопряженное «пространству» цепей L_p. Для этого временно (в настоящем разделе) воспользуемся обозначениями Дирака. Будем рассматривать элемент группы цепей L_p как кет-вектор $|b_p\rangle \in L_p$. Сопряженные бра-векторы образуют так называемые *коцепи*.

Формально каждый бра-вектор (коцепь) $\langle l^p|$ определяется линейным отображением группы цепей в группу коэффициентов G (множество целых чисел $\mathbb{Z}$, действительных чисел $\mathbb{R}$ или комплексных $\mathbb{C}$):

$$\langle l^p|b_p\rangle = \alpha(|b_p\rangle) \in G. \tag{2.7.1}$$

В силу линейности отображения имеем

$$\langle l^p \mid \sum_{(i)} \beta_i b_p^{(i)}\rangle = \sum_{(i)} \beta_i \langle l^p|b_p^{(i)}\rangle. \tag{2.7.2}$$

Поэтому отображение достаточно определить на отдельных клетках данной размерности p, составляющих разбиение многообразия.

Множество коцепей образует *группу коцепей* $L^p = \{\langle l^p|\}$ порядка p. Таким образом, группа коцепей — это множество гомоморфизмов группы L_p в группу коэффициентов G.

Поясним сказанное на примере трехмерного многообразия M.

1. Как известно, нульмерные клетки $|a_0\rangle$ — это просто точки многообразия M: $|a_0\rangle = x \in M$. Каждой нульмерной клетке x поставим в соответствие число (см.выражение (2.7.1)) $\langle l^0 \mid a_0\rangle = f(x)$. Таким образом, нульмерная коцепь $\langle l^0|$ — это функция на многообразии M.

2. Пусть $|b_1\rangle$— одномерная клетка, т. е. некоторая кривая в M и A — векторное поле на M. Рассмотрим криволинейный интеграл вдоль клетки:

$$\int_{|b_1\rangle} \vec{A}\, d\vec{s}. \tag{2.7.3}$$

Каждая дифференциальная форма $\vec{A}\, d\vec{s}$ ставит в соответствие цепи $|b_1\rangle$ интеграл (2.7.3), который есть просто число. Таким образом, $\vec{A}\, d\vec{s}$ можно отождествить с некоторой коцепью $\langle l^1|$. Формула (2.7.1) представляется в следующем виде:

$$\langle l^1 \mid b_1\rangle = \int_{|b_1\rangle} \vec{A}\, d\vec{s}. \tag{2.7.4}$$

3. Пусть $\vec{B}$ — снова векторное поле на M, $d\vec{\sigma}$ — элемент поверхности, направленный по нормали к ней. Всякой двумерной цепи мы ставим в соответствие интеграл:

$$\langle l^2 \mid b_2\rangle = \int\limits_{|b_2\rangle} \vec{B}\, d\vec{\sigma}. \tag{2.7.5}$$

В этом случае коцепи $\langle l^2|$ отвечает дифферинциальная форма второго порядка (два-форма) $\vec{B}\, d\vec{\sigma}$.

4. Аналогично произвольной трехмерной цепи $|b_3\rangle$ поставим в соответствие интеграл:

$$\langle l^3 \mid b_3\rangle = \int\limits_{|b_3\rangle} \psi(x)\, d^3x.$$

Три-форма $\psi(x)\, d^3x$ определяет коцепь $\langle l^3|$.

Приведенные примеры показывают, что кет-векторы (цепи) и бра-векторы (коцепи) принадлежат пространствам совершенно различной природы: в первом случае мы имеем геометрические объекты на многообразии, а во втором — дифференциальные формы.

Напомним, что при построении теории гомологий мы ввели граничный оператор Δ. Теперь нам понадобится *кограничный* оператор δ, сопряженный оператору Δ:

$$\langle l|\Delta|b\rangle = \langle b|\delta|l\rangle^*; \quad \delta = \Delta^+. \tag{2.7.6}$$

Отметим, что Δ действует на кет-векторы слева (цепи) $|b\rangle$ и понижает порядок:

$$L_p \xrightarrow{\Delta} L_{p-1} \tag{2.7.7}$$

а δ действует контравариантно (справа) на бра-векторы (коцепи) $\langle l|$ и повышает порядок:

$$L_p \xleftarrow{\delta} L_{p-1} \tag{2.7.8}$$

Покажем на примерах, как действует оператор когранице δ.

Пусть M по-прежнему трехмерное многообразие в трехмерном пространстве $\mathbb{R}^3$.

1. Рассмотрим простейшую одномерную цепь на M — кривую $|b_1\rangle$ с границей $\Delta|b_1\rangle =| a_0^{(1)} - a_0^{(2)}\rangle$. Обозначим $a_0^{(1)} = x_1$ и $a_0^{(2)} = x_2$. Учитывая обозначения первого примера, имеем

$$\langle l^0|\Delta|b_1\rangle = \langle l^0 \mid a_0^{(1)} - a_0^{(2)}\rangle = f(x_1) - f(x_2). \tag{2.7.9}$$

С другой стороны, формула Ньютона–Лейбница дает

$$f(x_1) - f(x_2) = \int\limits_{|b_1\rangle} \vec{\nabla} f(x)\, d\vec{s} = \langle l^1|b_1\rangle = \langle l^0|\delta|b_1\rangle, \tag{2.7.10}$$

где коцепь $\langle l^1|$ определяется один-формой $\vec{\nabla} f(x)\, d\vec{s}$.

Таким образом, в данном случае оператор δ переводит функции (ноль-формы) в один-формы:

$$\delta : f(x) \longrightarrow \vec{\nabla} f(x)\, d\vec{s}. \tag{2.7.11}$$

2. Пусть $|g_2\rangle$ — двумерная клетка. Тогда по теореме Стокса имеем

$$\oint\limits_{\Delta|g_2\rangle} \vec{A}\, d\vec{s} = \int\limits_{|g_2\rangle} \operatorname{rot} \vec{A}\, d\vec{\sigma}. \tag{2.7.12}$$

Левая часть этой формулы согласно выражению (2.7.4) имеет вид $\langle l^1|\Delta|g_2\rangle$. Тогда, сравнивая определение опрератора δ (2.7.6) и (2.7.12), получим, что δ переводит один-форму $\vec{A}\, d\vec{s}$ в два-форму $\operatorname{rot} \vec{A}\, d\vec{\sigma}$.

3. Если $|l_3\rangle$ — трехмерная клетка, то воспользуемся теоремой Гаусса

$$\oint\limits_{\Delta|g_3\rangle} \vec{B}\, d\vec{\sigma} = \int\limits_{|g_3\rangle} \vec{B}\, d^3 x. \tag{2.7.13}$$

Так же, как и в предыдущем примере, сравнивая формулы (2.7.13) и (2.7.6), получим, что δ может интерпретироваться как оператор, переводящий два-формы $\vec{B}\, d\vec{\sigma}$ в три-формы $\operatorname{div} \vec{B}\, d^3 x$.

Все используемые в этих примерах формулы (Ньютона–Лейбница, Стокса и Гаусса) символически записываются в виде (2.7.6). Эта формула, разумеется, верна для цепей и коцепей произвольной размерности и носит названия *формулы Стокса.* Менее формальная по сравнению с выражением (2.7.6) запись имеет вид:

$$\int\limits_{\Delta|b_p\rangle} \langle l^{p-1}| = \int\limits_{|b_p\rangle} \langle l^{p-1}|\delta. \tag{2.7.14}$$

Здесь мы подразумеваем, что коцепи реализованы в виде дифференциальных форм.

Важным свойством оператора δ является то, что квадрат его равен нулю

$$\delta^2 = 0. \tag{2.7.15}$$

В самом деле, согласно определению (2.7.6), $\delta^2=(\Delta^+)^2=(\Delta^2)^+$. Но $\Delta^2=0$ (см. свойство (2.1.6)). Конкретная реализация формулы (2.7.15) в частных случаях (см. формулы (2.7.11) (2.7.12) и (2.7.13) дает хорошо известные в курсе анализа формулы:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}\vec{\nabla} &= 0; \\ \operatorname{div}\operatorname{rot} &= 0. \end{aligned} \tag{2.7.16}$$

Теперь, имея в своем распоряжении комплекс, состоящий из групп коцепей L^p и оператора кограницы $\delta\,(\delta^2 = 0)$, мы можем построить группы когомологий.

Определим в группе коцепей L^p *подгруппу коциклов* C^p как ядро оператора δ:

$$C^p = \operatorname{Ker}\delta = \left\{\langle l^p| \in L^p \,\middle|\, \langle l^p|\delta = 0\right\}. \tag{2.7.17}$$

Подгруппа кограниц B^p определяется как образ оператора δ:

$$B^p = \operatorname{Im}\delta \left\{\langle l^p| \in L^p \,\middle|\, \langle l^p| = \langle l^{p-1}|\delta\right\}. \tag{2.7.18}$$

Всякая кограница есть коцикл: если $\langle b^p|\in B^p$, то $\langle b^p|\delta=\langle b^{p-1}|\delta^2=0$. Поэтому $B^p\subset C^p$ и мы можем рассмотреть фактор-группу $H^p=C^p/B^p$. Эта фактор-группа и есть *группа когомологий порядка* p. Ее элементами являются классы смежности:

$$H^p = \left\{ \langle c^p| + B^p \,\middle|\, \langle c^p| \in C^p \right\}. \tag{2.7.19}$$

Два коцикла $\langle c^p_{(1)}|$ и $\langle c^p_{(2)}|$ определяют один класс или один элемент группы H^p, если $(\langle c^p_{(1)}| - \langle c^p_{(2)}|) \in B^p$.

В этом случае говорят, что эти два коцикла *когомологичны*.

На языке дифференциальных форм коциклы это формы, которые оператором δ переводятся в ноль. Такие формы называются *замкнутыми*. Локально каждую замкнутую форму можно представить в виде $\langle l^p| = \langle l^{p-1}|\delta$. На языке форм низших порядков мы можем это условие записать в следующем виде (см. формулы (2.7.11), (2.7.12) и (2.7.13)):

$$\begin{aligned} &1) \text{ Если } \operatorname{rot}\vec{A} = 0, \text{ то } \vec{A} = \vec{\nabla} f \\ &2) \text{ Если } \operatorname{div}\vec{B} = 0, \text{ то } \vec{B} = \operatorname{rot}\vec{A}. \end{aligned} \tag{2.7.20}$$

Если M — обычное евклидово пространство $\mathbb{R}^3$, то условия (2.7.20), как известно из курса анализа, выполняются всегда и определяют безвихревое или соленоидальное поле.

В общем случае не всякую замкнутую форму $\langle l^p|$ ($\langle l^p|\delta = 0$) можно представить в виде $\langle l^{p-1}|\delta$.

Пример. *$M = S^1$ — окружность. Пусть φ — угловой параметр.*

Тогда $d\varphi$ — замкнутая один-форма (два-форма на S^1 отсутствует). Однако $d\varphi$ не определяет глобально один-форму, так как в окрестности точки $\varphi = 0$ функция, сопоставляющая каждой точке параметр φ, не является непрерывной.

Формы $\langle l^p |$, которые допускают представление:

$$\langle l^p| = \langle l^{p-1}|\delta, \tag{2.7.21}$$

называются *точными*. Именно они являются кограницами. Поэтому, для того чтобы построить группу когомологий $H^p(M)$, надо найти все линейно независимые замкнутые формы порядка p, которые не являются точными. Определение групп когомологий с помощью дифференциальных форм составляет содержание теоремы де Рама.

Теперь мы установим связь между группами гомологий $H_p(M)$ многообразия M и группами когомологий $H^p(M)$. Из формулы (2.7.6) следует, что

$$\langle l|b\rangle = 0 \quad \begin{cases} \text{если } \langle l| = \langle g|\delta, & \Delta|b\rangle = 0; \\ \text{если } \langle l|\delta = 0, & |b\rangle = \Delta|\rangle. \end{cases} \tag{2.7.22}$$

Иными словами, число $\langle l|b\rangle$ обращается в ноль, если $\langle l|$ — кограница и $|b\rangle$ — цикл, или $|l\rangle$ — коцикл и $|b\rangle$ — граница. Отсюда следует, что $\langle l|b\rangle$ зависит только от класса гомологий цикла $|b\rangle$ и класса когомологий коцикла $\langle l|$. Это позволяет установить изоморфизм между группами $H_p(M)$ и $H^p(M)$. Отметим сразу же, что если группа гомологий содержит периодическую подгруппу, то при при переходе к когомологиям она утрачивается, т. е. соответствие устанавливается по модулю кручения. В самом деле, если группа гомологий имеет $H_p(M)$ кручение, то существует цикл $|b\rangle$ негомологичный нулю, но его некоторое кратное гомологично нулю $\Delta|nb\rangle = 0$. Например, если M — проективная плоскость (рис. 14), то это цикл b. Тогда если $\langle l|$ кограница, то число $\langle l|b\rangle = 0$, хотя $\Delta|b\rangle \neq 0$. Когомологии имеют важное значение в нелинейных теориях поля. Коциклы, представленные в виде замкнутых дифференциальных форм, играют роль сохраняющихся токов, а интегралы от этих форм есть инвариантные топологические заряды.

Аппарат когомологий важен потому, что он дает возможность определить те особенности скалярных, векторных и других полей на многообразиях, которые зависят от топологических свойств самих многообразий, а не от конкретного вида рассматриваемых полей, определяемого теми или иными уровнями.

Ясно, что для групп когомологий можно развить тот же аппарат, что и для групп обычных гомологий (рассмотреть относительные когомологии, определить гомоморфизмы включения, проектирования, кограничный гомоморфизм, установить цепочки точных последовательностей и т. п.). К этим конкретным техническим вопросам так же, как и к различным реализациям коцепей и когомологий, мы будем обращаться по мере надобности в связи с рассмотренными предложениями. В заключении этого раздела заметим, что аппарат когомологий был предложен в 1934–1935 гг. в работах нескольких математиков — Александера, Колмогорова, Уитни и Чеха.