Глава 3
Теория Морса и ассоциированные вопросы

1. Критические точки. 2. Топология «области меньших значений». 3. Неравенства Морса. 4. Теорема Пуанкаре–Хопфа об индексах векторного поля. 5. Оценки числа полюсов аналитической функции. 6. Риманова поверхность алгебраической функции (формула Римана–Гурвица). 7. Размерность пространства мероморфных функций (формула Римана–Роха). 8. Топологические аспекты многоканальной задачи.

3.1. Критические точки

Мы возвращаемся к разделу 1.1 с тем, чтобы напомнить постановку вопроса о критических точках. Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ — дважды дифференцируемая функция n действительных переменных. Критической называется точка, в которой градиент функции равен нулю:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0; \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{3.1.1}$$

Поэтому в окрестности критической точки приращение функции может быть записано так:

$$\Delta f = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \Delta x_i \Delta x_j. \tag{3.1.2}$$

Критическая точка называется невырожденной, если

$$\det \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right) \neq 0. \tag{3.1.3}$$

Симметричная матрица $n \times n \left(\partial^2 f/\partial x_i \partial x_j\right)$ может быть приведена к диагональной форме линейным преобразованием:

$$\Delta y_i = \sum_j s_{ij} \Delta x_j, \tag{3.1.4}$$

где S — неособенная матрица. Тогда в невырожденной критической точке при соответствующем выборе масштаба измерения новых локальных переменных Δy_i формула (3.1.2) может быть переписана в виде (1.1.1):

$$\Delta f = -\sum_{i=1}^{k} (\Delta y_i)^2 + \sum_{i=k+1}^{n} (\Delta y_i)^2. \tag{3.1.5}$$

Мы называем точку критической типа K, если число отрицательных квадратов в формуле (3.1.5) равно K. Очевидно, что точка типа 0 есть минимум f, точка типа n — максимум, точки типа k при $0 < k < n$ называются седловыми. В частности, если $u(x_1, x_2)$ — функция, гармоническая в некоторой области, то все ее внутренние критические точки — седловые ($k = 1$). Действительно,

$$\det\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}\right)^2 < 0, \tag{3.1.6}$$

поскольку для гармонических функций

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}$$

Из формулы (3.1.6) следует, что в формуле (3.1.5) для Δu должен быть один отрицательный и один положительный квадрат, так как $\det(\partial^2 f/\partial x_i \partial x_j)$ инвариантен относительно преобразования (3.1.4).

Рассмотрим поверхность уровня, содержащую критическую точку, т. е. поверхность $f(x_i) = f(x_i^c) \equiv f_c$, где x_i^c — координаты критической точки. В окрестности критической точки на этой поверхности $\Delta f = 0$ и уравнение поверхности уровня в локальных координатах $\Delta y_i = y_i - y_i^c$ будет иметь вид:

$$-\sum_{i=1}^{k} (\Delta y_i)^2 + \sum_{j=k+1}^{n} (\Delta y_j)^2 = 0. \tag{3.1.7}$$

Таким образом, в окрестности критической точки поверхность уровня, содержащая критическую точку, в первом приближении совпадает с конусом. Если окружить критическую точку сферой S^{n-1} малого радиуса ε, то в тех же координатах уравнение этой сферы S^{n-1} запишется так:

$$\sum_{i=1}^{n}(\Delta y_i)^2 = \varepsilon^2. \tag{3.1.8}$$

Пересечение конуса со сферой S^{n-1} (3.1.8) есть прямая сумма двух сфер $S^{k-1} \oplus S^{n-k-1}$ $(k > 0)$:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k}(\Delta y_i)^2 &= \frac{\varepsilon^2}{2} \longrightarrow S^{k-1}; \\ \sum_{i=k+1}^{n}(\Delta y_i)^2 &= \frac{\varepsilon^2}{2} \longrightarrow S^{n-k-1}. \end{aligned} \tag{3.1.9}$$

Пусть теперь мы имеем поверхность уровня, отвечающую значению функции $f_c - \delta^2 < f_c$, где δ — малое число $(\delta < \varepsilon)$.

Лежащие на этой поверхности точки, близкие к критической, удовлетворяют уравнению гиперболоида:

$$\sum_{i=1}^{k}(\Delta y_i)^2 + \sum_{j=k+1}^{n}(\Delta y_j)^2 = -\delta^2. \tag{3.1.10}$$

Пересечение гиперболоида (3.1.10) со сферой (3.1.8) снова дает прямую сумму двух сфер:

$$\begin{aligned} S^{k-1} &= \left\{\sum_{i=1}^{k}\Delta y_i^2 = \frac{\varepsilon^2+\delta^2}{2}\right\}; \\ S^{n-k-1} &= \left\{\sum_{i=k+1}^{n}\Delta y_i^2 = \frac{\varepsilon^2-\delta^2}{2}\right\}. \end{aligned} \tag{3.1.11}$$