3.2. Топология области меньших значений

Многообразие всех точек, в которых функция f меньше заданного числа A, называется областью меньших значений и обозначается символом $(f < A)$. Ясно, что при прохождении через критическую точку, т. е. при росте A от $A = f_c - \delta$ до $A = f_c + \delta$, топологическая структура области меньших значений претерпевает изменения. Это иллюстрируется рис. 35 на примере функции от одного переменного, заданной на интервале (a, b).

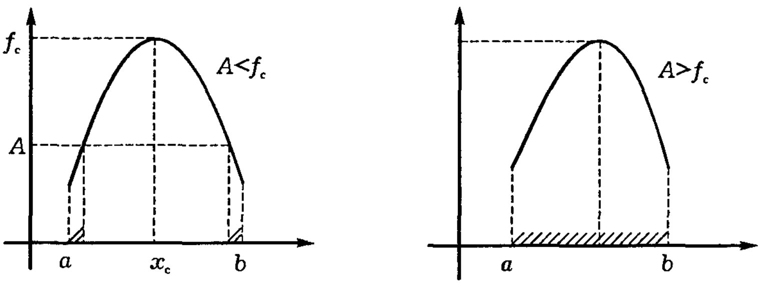

Рис. 35. Изменение топологической структуры области меньших значений при прохождении через критическую точку. Область меньших значений показана штриховкой.

Изменение топологической структуры области меньших значений при росте A можно выразить количественно через числа Бетти. Например, для случая, изображенного на рис. 35, нульмерное число Бетти $p_0(f < A) = 2$ при $A < f_c$ и $p_0(f < A) = 1$ при $A > f_c$. В общем случае изменение чисел Бетти области $(f < A)$ можно произвести по следующей схеме. Из области $(f < f_c + \delta)$ исключаем малую шаровую окрестность U_ε критической точки. Тогда

$$(f < f_c + \delta) = (f < f_c - \delta) \cup U_\varepsilon. \qquad (3.2.1)$$

Для нахождения чисел Бетти $p_r(f < f_c + \delta)$ по $p_r(f < f_c - \delta)$ и $p_r(U_\varepsilon)$ можно воспользоваться теоремой сложения (2.6.62), полагая

$$M_1 = (f < f_c - \delta), \quad M_2 = U_\varepsilon, \quad M_1 \cap M_2 = (f < f_c - \delta) \cap U_\varepsilon. \quad (3.2.2)$$

Мы докажем, что пересечение $M_1 \cap M_2$ гомеоморфно прямой сумме шарового слоя R_1^k и шара R_0^{n-k}: $R_1^k \oplus R_0^{n-k}$ $(k > 0)$. В самом деле

$$M_1 = \left\{ \Delta y \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, -\sum_{i=1}^{k} \Delta y_i^2 + \sum_{i=k+1}^{n} \Delta y_i^2 < -\delta^2 \right\};$$

$$M_2 = \left\{ \Delta y \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n} \Delta y_i^2 < \varepsilon^2 \right\};$$

решая совместно эти неравенства, получим

$$\sum_{i=k+1}^{n} \Delta y_i^2 < \frac{\varepsilon^2 - \delta^2}{2}$$

и

$$\delta^2 < \sum_{i=1}^{k} \Delta y_i^2 < \varepsilon^2.$$

Первое из них определяет шар R_0^{n-k} в пространстве $\mathbb{R}^{n-k}$, а второе — шаровой слой R_1^k в пространстве $\mathbb{R}^k$. Поэтому $M_1 \cap M_2 \cong R_1^k \oplus R_0^{n-k}$ (прямое произведение).

Для чисел Бетти произведения двух топологических пространств имеет место формула Пуанкаре

$$p_2(M' \oplus M'') = \prod_{i+j=r} p_i(M')p_j(M'').$$

Так как $p_j(R_0^n) = 0$ и $p_0(R_0^n) = 1$ (см. равенство (2.6.74)), а $p_j(R_1^k) = p_j(S^{k-1})$ (см. выражение (2.6.82)), то

$$p_2(R_1^k \oplus R_0^{n-k}) = \prod_{i=0}^{r} p_r(S^{k-1})p_{r-i}(R_0^n) = p_r(S^{k-1}).$$

Поскольку $U_r = R_0^n$ (n-мерный шар), согласно теореме сложения (2.6.62) имеем

$$\Delta p_r = p_r(R_0^n) - p_r(S^{k-1}) + p'_r + p'_{r-1}. \tag{3.2.3}$$

Здесь

$$\Delta p_r = p_r(f < f_c + \delta) - p_r(f < f_c - \delta)$$

и p'_r, p'_{r-1} — ранги групп связывающих циклов. В данном случае связывающим циклом может быть только само пересечение $M_1 \cap M_2$, на котором существует единственный негомологичный нулю цикл — сфера S^{k-1}.

Для $r \neq k,\ k-1$ формула (3.2.3) дает

$$\Delta p_r = 0; \quad r \neq k,\ k-1. \tag{3.2.4}$$

Это получается прямой подстановкой чисел $p_r(R_0^n)$ и $p_r(S^{k-1})$, определяемых равенствами (2.6.74) и (2.6.80) с учетом того обстоятельства, что $n > k-1$ и поэтому $p_n(S^{k-1}) = 0$. Кроме того, поскольку связывающим циклом может быть только сфера S^{k-1}, следует иметь в виду, что $p'_r = 0$ при $r \neq k-1$ и $p'_{r-1} = 0$ при $r \neq k$.

Таким образом, при прохождении критической точки типа k изменение могут испытывать только числа Бетти области меньших значений p_k и p_{k-1}. Каждое из этих чисел меняется, зависит от того, является ли S^{k-1} связывающим циклом или нет.

Допустим, что S^{k-1} есть связывающий цикл. Тогда $p'_{k-1} = 1$, $p_k(S^{k-1}) = p'_k = 0$ и мы получаем

$$\Delta p_k = 1, \tag{3.2.5}$$

т. е. при прохождении критической точки k-мерное число Бетти p_k возрастает на единицу. Для $r = k-1$ имеем

$$p_{k-1}(S^{k-1}) = p'_{k-1} = 1; \quad \Delta p_{k-1} = 0. \tag{3.2.6}$$

Иными словами, *если S^{k-1} — связывающий цикл, то p_k возрастает на единицу, а остальные числа не меняются.*

Примем теперь, что S^{k-1} не является связывающим циклом.

Тогда

$$p'_r = p'_{r-1} = 0$$

при всех r, и мы находим

$$\Delta p_k = 0. \tag{3.2.7}$$

Для $r = k - 1$ все числа в правой части равенства (3.2.3) равны нулю, за исключением $p_{k-1}(S^{k-1}) = 1$. Поэтому

$$\Delta p_{k-1} = -1. \tag{3.2.8}$$

Мы приходим к выводу, что *если S^{k-1} не является связывающим циклом, то p_{k-1} убывает на единицу, а остальные числа p_r не меняются.* Заметим, что при выводе формул (3.2.4)–(3.2.8) неявно предполагалось, что $k \neq 0, 1$ (при $k = 0$ нет сферы S^{k-1}, при $k = 1$ $p_0(S^0) = 2$, а не единице, как это имеет место в общем случае для $p_{k-1}(S^{k-1})$).

При $k = 0$ все члены в правой части равенства (3.2.3), кроме первого слагаемого, равны нулю.

Так как

$$p_0(R_0^n) = 1; \quad p_r(R_0^n) = 0; \ r > 0,$$

то

$$\Delta p_0 = 1; \tag{3.2.9}$$

остальные числа Бетти не изменяются.

В случае $k = 1$ имеем

$$p_0(R_0^n) = 1; \quad p_0(S^0) = 2; \quad p_r' = p_r(R_0^n) = p_r(S^0) = 0; \ r > 0.$$

Поэтому при $p_0' = 1$ получаем

$$\Delta p_0 = 0; \tag{3.2.10}$$

все остальные $\Delta p_r = 0$. Если же $p_0 = 0$, то

$$\Delta p_0 = 1; \quad \Delta p_r = 0; \ r > 0. \tag{3.2.11}$$

Резюмируя изложенное, мы можем сказать, что всегда при прохождении критической точки типа k справедлива либо формула (3.2.5), либо (3.2.8). Критические точки, для которых справедлива формула (3.2.5) называются *возрастающими* типа k; точки же, удовлетворяющие формуле (3.2.8) именуются *убывающими* типа k.