3.3. Неравенства Морса

Результаты предыдущего параграфа мы используем ниже для оценки числа критических точек функции, заданной на многообразии. С этой целью рассмотрим область меньших значений $(f < A)$, изменяя A от наименьшего значения $A_<$, принимаемого функцией f на многообразии, до наибольшего $A_>$. Ясно, что область $(f < A_<)$ — пустое множество; область же $(f < A_>)$ охватывает все многообразие, на котором задана функция f. По мере изменения A числа Бетти области $(f < A)$ будет меняться при прохождении каждой критической точки в соответствии с полученными выше результатами: каждая критическая точка возрастающего типа k будет увеличивать на единицу число Бетти p_k, каждая критическая точка убывающего типа k будет уменьшать на единицу число Бетти p_{k-1}. Обозначим через m_k^+ и m_k^- числа критических точек соответственно возрастающего и убывающего типа k. Общее число критических точек типа k будет равно

$$m_k = m_k^+ + m_k^-, \tag{3.3.1}$$

Заметим, что в случае $k = 0$ точек убывающего типа 0 нет $(m_0^- = 0)$, поэтому

$$m_0 = m_0^+ \tag{3.3.2}$$

Основываясь на изложенном, мы можем написать для k-мерных чисел Бетти p_k следующее равенства:

$$p_k = m_k^+ - m_{k+1}^-; \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1; \tag{3.3.3}$$

$$p_n = m_n^+. \tag{3.3.4}$$

Здесь n — размерность многообразия; поэтому критических точек убывающего типа $n+1$ нет: $m_{n+1}^- = 0$. Формулы (3.3.3) и (3.3.4) дают возможность получить неравенства, оценивающие снизу числа критических точек.

Прежде всего, складывая равенства (3.3.3) и (3.3.4), получаем оценку снизу на общее число критических точек всех типов k:

$$\sum_{k=0}^{n} p_k \leqslant \sum_{k=0}^{n} m_k. \tag{3.3.5}$$

Далее, составляя альтернированные суммы

$$\sum_{r=0}^{k}(-1)^r p_r,$$

получаем неравенство Морса:

$$\begin{aligned} &p_0 \leqslant m_0;\\ &p_0 - p_1 \geqslant m_0 - m_1;\\ &p_0 - p_1 + p_2 \leqslant m_0 - m_1 + m_2;\\ &\chi = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k p_k = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k m_k. \end{aligned} \tag{3.3.6}$$

Заметим, что формулы (3.3.5) и (3.3.6) справедливы как для обычных чисел Бетти, так и для чисел Бетти (mod 2), поскольку использованная при выводе неравенств Морса теорема сложения чисел Бетти (формула (2.6.62)) справедлива в обоих случаях. Для ориентируемых многообразий $p = p_k$ (mod 2), но для неориентируемых многообразий эти числа различаются и в формулы (3.3.5) и (3.3.6) для получения более сильных оценок выгодно подставлять p_k (mod 2). Например, для двумерной проективной плоскости $\sum\limits_{k=0}^{r} p_k = 1$, тогда как $\sum\limits_{k=0}^{r} p_k \pmod 2 = 3$.

Поэтому при использовании обычных чисел Бетти неравенство (3.3.5) для общего числа критических точек $m = \sum\limits_{k=0}^{r} m_k$ дает неравенство

$$m \geqslant 1;$$

подстановка же в формулу (3.3.5) p_k (mod 2) приводит к более точной оценке.

$$m \geqslant 3.$$

Полученное выше неравенство относится к невырожденным критическим точкам. Они будут справедливы и для вырожденных точек, если под m_k подразумевать сумму кратностей геометрически различных критических точек типа k. Это заключение довольно очевидно, поскольку «шевелением» параметров можно превратить вырожденную критическую точку в близко лежащие невырожденные, так что число образовавшихся в результате «шевеления» невырожденных точек будет равно кратности вырождения исходной точки. Оценка числа геометрически различных критических точек на основе топологических характеристик многообразия требует привлечения более сложных понятий алгебраической топологии, и мы этим здесь заниматься не будем. Некоторые относящиеся к этой проблеме результаты изложены в цитированной выше книге Эльсгольца [23].

Наконец, заметим, что неравенства Морса используют не всю информацию о структуре групп гомологий, а только числа Бетти (за «бортом» остаются коэффициенты кручений). Поэтому топологические оценки числа критических точек в ряде случаев наверняка могут быть улучшены по сравнению с неравенствами Морса (учет кручений см. в монографии Эльсгольца).

Заключая этот параграф, подчеркиваем то замечательное обстоятельство, что топологические свойства многообразия, на котором задана функция, определяет некоторые ее «обязательные» особенности. Этот факт будет использован ниже для оценки числа полюсов функции, мероморфной в некоторой области (разд. 3.5). Предварительно мы остановимся на другом следствии неравенств (3.3.6) — теореме Пуанкаре–Хопфа для векторных полей на многообразии.

3.4. Теорема Пуанкаре–Хопфа в индексах векторного поля

Пусть на многообразии задано дифференцируемое векторное поле $A_i(x)$, $x{=}(x_1, \ldots, x_n)$, $i{=}1, 2, \ldots$ Вблизи точки x^0 вектор поля $A_i(x^0)$ может быть представлен в виде:

$$A_i(x) \cong A_i(x^0) + \frac{\partial A_i(x_j^0)}{\partial x^0}\, dx_j. \tag{3.4.1}$$

Если $A_i(x^0) \neq 0$, то ясно, что при обходе вокруг точки x^0 поворот вектора $A_i(x)$ будет мал, если достаточно мал dx_j. При полном обходе