критическую точку в близко лежащие невырожденные, так что число образовавшихся в результате «шевеления» невырожденных точек будет равно кратности вырождения исходной точки. Оценка числа геометрически различных критических точек на основе топологических характеристик многообразия требует привлечения более сложных понятий алгебраической топологии, и мы этим здесь заниматься не будем. Некоторые относящиеся к этой проблеме результаты изложены в цитированной выше книге Эльсгольца [23].

Наконец, заметим, что неравенства Морса используют не всю информацию о структуре групп гомологий, а только числа Бетти (за «бортом» остаются коэффициенты кручений). Поэтому топологические оценки числа критических точек в ряде случаев наверняка могут быть улучшены по сравнению с неравенствами Морса (учет кручений см. в монографии Эльсгольца).

Заключая этот параграф, подчеркиваем то замечательное обстоятельство, что топологические свойства многообразия, на котором задана функция, определяет некоторые ее «обязательные» особенности. Этот факт будет использован ниже для оценки числа полюсов функции, мероморфной в некоторой области (разд. 3.5). Предварительно мы остановимся на другом следствии неравенств (3.3.6) — теореме Пуанкаре–Хопфа для векторных полей на многообразии.

3.4. Теорема Пуанкаре–Хопфа в индексах векторного поля

Пусть на многообразии задано дифференцируемое векторное поле $A_i(x)$, $x=(x_1, \dots, x_n)$, $i=1, 2, \dots$ Вблизи точки x^0 вектор поля $A_i(x^0)$ может быть представлен в виде:

$$A_i(x) \cong A_i(x^0) + \frac{\partial A_i(x_j^0)}{\partial x^0}\, dx_j. \tag{3.4.1}$$

Если $A_i(x^0) \neq 0$, то ясно, что при обходе вокруг точки x^0 поворот вектора $A_i(x)$ будет мал, если достаточно мал dx_j. При полном обходе вокруг x^0, т. е. при повороте вектора на угол 2π в двумерном случае, вектор $A_i(x)$ не повернется. Если же $A_i(x^0)$, то

$$A_i(x) = \frac{\partial A_i(x^0)}{\partial x_j} dx_j \tag{3.4.2}$$

и вектор $A_i(x)$ будет поворачиваться вместе с dx_j. При полном обходе вокруг x^0 он повернется на $\pm\Omega$ (Ω — полный телесный угол в плоскости, содержащей x^0; в двумерном случае $\Omega = 2\pi$), если $\det\{\partial A_i(x^0)/\partial x_j^0\} \neq 0$, т. е. если точка x^0 невырождена (если степень вырождения равна m, то полный поворот вектора $A_i(x)$ будет иметь кратность m). Таким образом, нули векторного поля являются его особыми точками: направление вектора в такой точке однозначно не определено. Будем для простоты рассматривать невырожденные особые точки (напомним, что вырожденная точка может быть «шевелением» параметров переведена в невырожденную) и выясним вопрос о знаке угла поворота $A_i(x)$ относительно угла поворота dx_j. Легко понять, что он определяется знаком $\det\{\partial A_i(x^0)/\partial x_j^0\}$, который по предположению, не равен нулю, так как точка x^0 невырожденная. В самом деле, вектор $A_i(x)$ получается из dx_j линейным преобразованием с матрицей $\{\partial A_i(x^0)/\partial x_j^0\}$. Если детерминант этого преобразования положителен, то системы ортов в пространствах A_i и dx_j ориентированы одинаково, а следовательно, одинаково определены и положительные направления отсчета углов. Если же $\det\{\partial A_i(x^0)/\partial x_j^0\} < 0$, то положительным направлениям отсчета углов в пространстве dx_j отвечают отрицательные направления в пространстве $A_i(x)$. Рис. 36 иллюстрирует сказанное на примере двумерного поля.

Введем важное понятие. *Индексом невырожденного нуля* x^0 векторного поля $A(x)$ называется знак детерминанта $\det\{\partial A_i(x^0)/\partial x_j^0\}$. Разумеется, можно определить индексы полюсов векторного поля; примерами полюсов векторных полей могут служить электрическое поле кулоновского центра, магнитное поле линейного тока.

Пусть в некоторой локальной системе отсчета $A_j = a_j/r$, где a_j — вектор, регулярный при $r \to 0$. Тогда вблизи полюса, т. е. при доста-

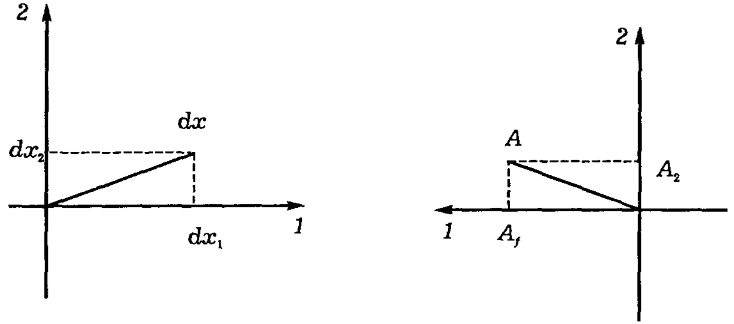

Рис. 36. Направление осей и отсчета углов в пространствах $d\vec{x}$ и $\vec{A}$ при $\det\{\partial A_i(x^0)/\partial x_j^0\} < 0$.

точно малом $r(x^0) = r_0$, мы можем написать, сохраняя только старшие члены, следующее равенство:

$$A_i(x) = \frac{\widehat{r}_j a_i(x^0)}{r_0^2}\, dx_j; \quad \widehat{r}_j^0 = \frac{x_j^0}{r_0}. \tag{3.4.3}$$

Поэтому при $r \to 0$ и $A_i(x^0) \to \infty$ вектор $A_i(x)$ будет поворачиваться вместе с dx_i, как и в случае нуля поля ($A_i(x^0) = 0$), рассмотренном выше.

До сих пор мы имели дело с невырожденными особыми точками. В общем случае индекс особой точки выражается через другую величину — *степень отображения*. Рассмотрим отображение сферы $S^{n-1}(dx)$

$$\sum (dx^i)^2 = \varepsilon^i$$

на сферу $S^{n-1}(\widehat{A})$ единичного вектора $\widehat{A} = \left\{\frac{A_i}{|A|}\right\} \left(|A|^2 = \sum |A_i|^2\right)$,

которое осуществляет поле $A(x)$ в окрестности особой точки x^0. Каждой точке $y \in S^{n-1}(\widehat{A})$ отвечает, вообще говоря, несколько точек $x \in S^{n-1}(dx)$. *Степень отображения в точке* x — это число, равное $+1$ или -1, в зависимости от того, одинаково или противоположно ориентированы окрестности сфер $S^{n-1}(dx)$ и $S^{n-1}(\widehat{A})$ в точках x и y. Сумма степеней во всех точках x прообраза точки y называется *степенью* *отображения.* Казалось бы, что эта величина зависит от выбора точки $y \in S^{n-1}(A)$. Однако существует теорема, согласно которой эта величина одна и та же почти для всех точек y. Степень отображения — это многомерное обобщение числа оборотов при отображении S^1 в S^1.

Индекс особой точки векторного поля $A(x)$ (вырожденной или невырожденной) *есть по определению степень отображения* $S^{n-1}(dx)$ *в* $S^{n-1}(\widehat{A})$. Интуитивно ясно, что при таком определении индекс особой точки не зависит от выбора радиуса ε сферы $S^{n-1}(dx)$. Если точка x^0 невырожденная, то данное определение, как легко понять, совпадает с предыдущим.

Отметим также, что степень отображения определяется для произвольного гладкого отображения S^{n-1} в S^{n-1} и, вообще, для гладких отображений компактных многообразий.

Сумма индексов векторного поля, заданного на многообразии без края, не зависит от конкретного вида поля. Поясним это в двумерном случае. Для этого заметим, во-первых, что при обходе по замкнутому контуру, охватывающему все особые точки поля, поворот вектора будет определяться суммой индексов поля. Последнее очевидно для контура C_1 на рис. 37. При деформации же этого контура в контур C_2 результат не изменится. Представим, что имеется два линейно независимых вектора поля $A_j(x)$ и $B_j(x)$ и что контур C_2 охватывает все особые точки обоих полей. Предположим также, что контур C_2 такой, что $A_j(x) \neq \lambda B_j(x)$ ни в одной из точек этого контура. Если суммы индексов полей $A_j(x)$ и $B_j(x)$ различаются, то при обходе по контуру C_2 один из векторов будет поворачиваться медленнее другого и поэтому в некоторой точке вектора $A_j(x)$ и $B_j(x)$ должны быть коллинеарны, что противоречит исходному предположению.

Таким образом, будем считать доказанным следующий факт: сумма индексов векторного поля не зависит от выбора векторного поля. Исходя из этого, мы докажем, что она является топологическим инвариантом. Для вычисления воспользуемся индексами поля градиента $\partial f / \partial x_i$, $i = 1, \ldots, n$ дважды дифференцируемой функции. Особыми точками этого поля будут критические точки функции $f(x_1, \ldots, x_n)$.

Будем, как и раньше, считать все критические точки функции не-

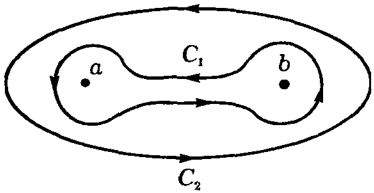

Рис. 37. Обход по контурам C_1 и C_2 дает один и тот же поворот вектора поля (a, b — особые точки поля, между C_1 и C_2 особых точек нет).

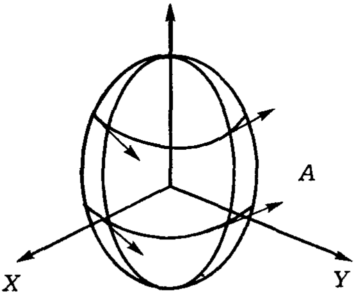

Рис. 38. Вектор–потенциал поля монополя Дирака.

вырожденными. Тогда индекс $n(q)$ градиента $\partial f/\partial x_i$ критической точке q типа k будет равен

$$n_k = (-1)^k. \tag{3.4.4}$$

Это непосредственно следует из того, что знак $\det\left\{\partial^2 f/\partial x_i \partial x_j\right\}$ в критической точке типа k равен $(-1)^k$. Таким образом,

$$\sum_q n(q) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k m_k. \tag{3.4.5}$$

Здесь m_k — число критических точек типа k, а сумма по q распространяется на все критические точки q. Однако, согласно равенству Морса (формула (3.3.6)), альтернативная сумма числа критических точек в правой части формулы (3.4.5) равна эйлеровой характеристике многообразия. Сравнение формул (3.4.5) и (3.3.6) доказывает теорему Пуанкаре–Хопфа (сумма индексов векторного поля на многообразии равна эйлеровой характеристике этого многообразия):

$$\chi = \sum_q n(q). \tag{3.4.6}$$

Следствием этой теоремы является тот факт, что векторное поле без особенностей может существовать только на многообразии, эйлерова характеристика которого равна нулю. Поскольку эйлерова характеристика всякой четномерной сферы равна двум, то на такой поверхности векторного поля без особенностей задать нельзя. Это относится, в частности, и к двумерной сфере (теорема о невозможности «причесать ежа»). Хорошим примером проявления этой теоремы может служить вектор-потенциал $\vec{A}$ поля дираковского монополя. Напряженность магнитного поля $\vec{H}$ монополя с магнитным зарядом g определяется равенством:

$$\vec{H} = g\hat{\vec{r}}/_{r^2}; \quad \hat{\vec{r}} = \vec{r}/_{r}. \tag{3.4.7}$$

Так как

$$H = \operatorname{rot}\vec{A}\|\vec{r}, \tag{3.4.8}$$

то в каждой точке вектор-потенциал $\vec{A}$ должен лежать в касательной плоскости к сфере, т. е. $\vec{A}$ должен быть двумерным векторным полем на сфере S^2 и потому должен иметь особенности по угловым переменным при любом r. Иными словами вектор-потенциал $\vec{A}$ поля монополя будет иметь особенности в каждой точке некоторой линии в трехмерном пространстве. Нетрудно догадаться, что этой линией должна быть полярная ось, а особые точки должны находиться в полюсах сферы, где координатная сетка (мередианы и параллели) имееет особенности. Действительно возможное решение для $\vec{A}$ имеет вид:

$$A_r = A_\Theta = 0; \quad A_\varphi = \frac{g}{r}\operatorname{tg}\frac{\Theta}{2}. \tag{3.4.9}$$

Здесь A_r, A_Θ, A_φ — компоненты $\vec{A}$ в сферической системе координат. Особыми точками поля $\vec{A}$ являются точки $\Theta = 0, \pi$, причем индексы поля $\vec{A}$ в каждой из этих точек $n(0) = n(\pi) = 1$ (см. рис. 38), так что сумма индексов равна двум, как это и должно быть для S^2 согласно формуле (3.4.6). Из теоремы Пуанкаре–Хопфа в данном случае следует, что никаким изменением калибровки потенциала эти особенности вектор-потенциала поля монополя устранить нельзя.

Уже упоминавшимся ранее следствием теоремы Пуанкаре–Хопфа является также и тот факт, что аналитическая функция одного переменного, голоморфна во всей комплексной плоскости, не может быть отлична от константы. В самом деле, действительная и мнимая части такой функции должны быть гармоническими функциями во всей плоскости. Критические точки отличной от константы гармонической функции двух переменных могут быть только седловыми точками типа $k = 1$ (см. разд. 3.1, формулу (3.1.6)). Следовательно, согласно формуле (3.4.4) все индексы особых точек градиента гармонической функции отрицательны. С другой стороны, комплексная плоскость гомеоморфна сфере S^2, эйлерова характеристика которой положительна ($\chi(S^2) = 2$). Таким образом, существование отличной от константы аналитической функции, голоморфной во всей комплексной плоскости z, противоречило бы формуле Пуанкаре–Хопфа (3.4.6).

3.5. Оценка числа полюсов аналитической функции

Неравенства Морса для числа критических точек относятся к действительным функциям действительных переменных. Они, однако, могут быть использованы для оценок числа полюсов и нулей аналитической функции $f(z)$ комплексной переменной z, если вместо самой функции $f(z)$ рассматривать действительную функцию:

$$U(x, y) = \ln|f(z)|; \quad z = x + iy. \tag{3.5.1}$$

Вблизи нуля или полюса мероморфной в некоторой области функции $f(z)$ функция U может быть представлена в виде:

$$U = m \ln|z - z_1| + \varphi(x, y), \tag{3.5.2}$$

где m — кратность нуля ($m > 0$) или полюса ($m < 0$), а $\varphi(x, y)$ — гармоническая в окрестности z_1 функция двух переменных. Легко видеть, что точка $z = z_1$ будет играть роль критической точки функции U: при $m > 0$ — роль минимума, при $m < 0$ — роль максимума. То обстоятельство, что U обращается к точке z_1 в бесконечность, для наших целей несущественно. Поскольку z_1 — изолированная точка, мы можем, окружив ее некоторой достаточно малой окрестностью радиуса ε,