Уже упоминавшимся ранее следствием теоремы Пуанкаре–Хопфа является также и тот факт, что аналитическая функция одного переменного, голоморфна во всей комплексной плоскости, не может быть отлична от константы. В самом деле, действительная и мнимая части такой функции должны быть гармоническими функциями во всей плоскости. Критические точки отличной от константы гармонической функции двух переменных могут быть только седловыми точками типа $k = 1$ (см. разд. 3.1, формулу (3.1.6)). Следовательно, согласно формуле (3.4.4) все индексы особых точек градиента гармонической функции отрицательны. С другой стороны, комплексная плоскость гомеоморфна сфере S^2, эйлерова характеристика которой положительна ($\chi(S^2) = 2$). Таким образом, существование отличной от константы аналитической функции, голоморфной во всей комплексной плоскости z, противоречило бы формуле Пуанкаре–Хопфа (3.4.6).

3.5. Оценка числа полюсов аналитической функции

Неравенства Морса для числа критических точек относятся к действительным функциям действительных переменных. Они, однако, могут быть использованы для оценок числа полюсов и нулей аналитической функции $f(z)$ комплексной переменной z, если вместо самой функции $f(z)$ рассматривать действительную функцию:

$$U(x, y) = \ln|f(z)|; \quad z = x + iy. \tag{3.5.1}$$

Вблизи нуля или полюса мероморфной в некоторой области функции $f(z)$ функция U может быть представлена в виде:

$$U = m\ln|z - z_1| + \varphi(x, y), \tag{3.5.2}$$

где m — кратность нуля ($m > 0$) или полюса ($m < 0$), а $\varphi(x, y)$ — гармоническая в окрестности z_1 функция двух переменных. Легко видеть, что точка $z = z_1$ будет играть роль критической точки функции U: при $m > 0$ — роль минимума, при $m < 0$ — роль максимума. То обстоятельство, что U обращается к точке z_1 в бесконечность, для наших целей несущественно. Поскольку z_1 — изолированная точка, мы можем, окружив ее некоторой достаточно малой окрестностью радиуса ε, «регуляризовать» функцию U в этой точке, т. е. заменить U на функцию $\widetilde{U}$, конечную в точке z_1 и имеющую в ней минимум, если ($m > 0$) или максимум ($m < 0$). Используя затем теорию Морса применительно к регуляризованной функции $\widetilde{U}$, мы получим для нее оценки снизу для чисел критических точек, которые, очевидно, будут справедливы и для U, т. к. топологические свойства областей меньших значений будут одинаковы для обеих функций при любом сколь угодно малом радиусе ε упомянутой окрестности логарифмического полюса z_1. Отметим, что *m-кратный* полюс или нуль функции $f(z)$ будет при этом выступать как простой (некратный) максимум или минимум функции U.

Нам остается теперь лишь применить соотношения (3.3.6) к функции двух переменных. Многообразием, характеризуемым числами Бетти p_r, является в рассматриваемом случае область мероморфности функции $f(z)$. Тогда из формулы (3.3.6) получаем следующие соотношения:

$$m_0 + m_1 + m_{\text{макс}} \geqslant p_0 + p_1 + p_2; \tag{3.5.3}$$

$$m_0 - m_1 + m_{\text{макс}} = p_0 - p_1 + p_2 = \chi. \tag{3.5.4}$$

Здесь m_0 — суммарное число нулей $f(z)$ и минимумов функции U, не являющихся нулями $f(z)$; m_1 — число седловых точек функции U; $m_{\text{макс}}$ — суммарное число полюсов $f(z)$ и максимумов функции U, не являющихся полюсами $f(z)$. При этом в соответствии со сказанным ранее в числа m_0 и $m_{\text{макс}}$ входят только геометрически различные нули и полюса функции $f(z)$, т. е. каждый нуль или полюс вне зависимости от кратности считается один раз.

Применим теперь соотношения (3.5.3) и (3.5.4) к оценке числа полюсов и нулей функции мероморфной в области S_l^2, т. е. сферы с l дырками, которая гомеоморфна кругу R_{l-1}^2 с $l-1$ дырками. В этом случае минимумы и максимумы функции U, не являющиеся нулями или полюсами $f(z)$, могут быть расположены только на границе области, т. к. эти экстремумы должны принадлежать гармонической функции $\varphi(x, y)$ (см. формулу (3.5.2)), все внутренние критические точки которой могут быть только седловыми. Далее заметим, что в число $m_{\text{макс}}$ в формулах (3.5.3) и (3.5.4) не входят максимумы, лежащие на границе. Действительно, топологическая структура области меньших значений при прохождении точки граничного максимума не может измениться; не меняются при этом, следовательно, и числа Бетти области меньших значений. Последнее, в свою очередь, означает, что в правые части равенств (3.3.3) и (3.3.4) для $k = n$ и $k = n - 1$ граничные максимумы не дают вклада. Таким образом для области с границей

$$m_{\text{макс}} = m_p, \tag{3.5.5}$$

где m_p — число внутренних полюсов функции $f(z)$. Согласно изложенному, m_0 для области с границей равно сумме чисел геометрически различных нулей функции $f(z)$ и граничных минимумов функции U, не являющихся нулями $f(z)$. Согласно предыдущему для области S_l^2 при $l \neq 0$ мы имеем

$$p_0(S_l^2) = 1; \quad p_1(S_l^2) = l - 1; \quad p_2(S_l^2) = 0. \tag{3.5.6}$$

Отсюда из формул (3.5.3), (3.5.4) следует

$$m_0 + m_1 + m_p \qquad \geqslant l; \tag{3.5.7}$$

$$m_0 - m_1 + m_p = \chi(S_l^2) \quad = l - 1. \tag{3.5.8}$$

Мы рассмотрели область мероморфности S_l^2, т. е. сферу с l дырками. Рассуждая совершенно аналогичным образом, можно получить ограничения на числа m_0, m_1 и m_p для функции, мероморфной на римановой поверхности, гомеоморфной сфере P_g^l с g ручками и l дырками. При этом мы получим

$$m_0 + m_1 + m_p \geqslant 2g + l + 2; \tag{3.5.9}$$

$$m_0 - m_1 + m_p = \chi(P_g^l) = 2 - 2g - l. \tag{3.5.10}$$

3.6. Риманова поверхность алгебраической функции (формула Римана–Гурвица)

В этом параграфе мы выразим эйлерову характеристику римановой поверхности алгебраической функции одной переменной через число листов и порядки ветвления точек ветвления. Поскольку римановы поверхности алгебраических функций одной переменной являются ориентируемыми двумерными многообразиями без края, то эйлерова характеристика полностью определит топологические свойства рассматриваемой римановой поверхности.