жет измениться; не меняются при этом, следовательно, и числа Бетти области меньших значений. Последнее, в свою очередь, означает, что в правые части равенств (3.3.3) и (3.3.4) для $k = n$ и $k = n-1$ граничные максимумы не дают вклада. Таким образом для области с границей

$$m_{\text{макс}} = m_p, \tag{3.5.5}$$

где m_p — число внутренних полюсов функции $f(z)$. Согласно изложенному, m_0 для области с границей равно сумме чисел геометрически различных нулей функции $f(z)$ и граничных минимумов функции U, не являющихся нулями $f(z)$. Согласно предыдущему для области S_l^2 при $l \neq 0$ мы имеем

$$p_0(S_l^2) = 1; \quad p_1(S_l^2) = l - 1; \quad p_2(S_l^2) = 0. \tag{3.5.6}$$

Отсюда из формул (3.5.3), (3.5.4) следует

$$m_0 + m_1 + m_p \qquad \geqslant l; \tag{3.5.7}$$

$$m_0 - m_1 + m_p = \chi(S_l^2) \quad = l - 1. \tag{3.5.8}$$

Мы рассмотрели область мероморфности S_l^2, т. е. сферу с l дырками. Рассуждая совершенно аналогичным образом, можно получить ограничения на числа m_0, m_1 и m_p для функции, мероморфной на римановой поверхности, гомеоморфной сфере P_g^l с g ручками и l дырками. При этом мы получим

$$m_0 + m_1 + m_p \geqslant 2g + l + 2; \tag{3.5.9}$$

$$m_0 - m_1 + m_p = \chi(P_g^l) = 2 - 2g - l. \tag{3.5.10}$$

3.6. Риманова поверхность алгебраической функции (формула Римана–Гурвица)

В этом параграфе мы выразим эйлерову характеристику римановой поверхности алгебраической функции одной переменной через число листов и порядки ветвления точек ветвления. Поскольку римановы поверхности алгебраических функций одной переменной являются ориентируемыми двумерными многообразиями без края, то эйлерова характеристика полностью определит топологические свойства рассматриваемой римановой поверхности.

Пусть q есть точка ветвления и l_q ее порядок ветвления ($l_q > 1$ — целое число; $l_q = 1$ отвечает регулярной неветвящейся точке q). Напомним, что алгебраическая функция имеет конечное число точек ветвления и все они конечного порядка ($l_q < \infty$). Введем число n_q, равное числу точек римановой поверхности «над q», т. е. числу значений алгебраической функции $u = f(z)$ в точке $z = q$. Если бы q была регулярной точкой ($l_q = 1$), то, очевидно $n(q)$ было бы равно числу листов n. Если же q является точкой ветвления ($l_q > 1$), то n_q связано с числом листов n и порядком ветвления l_q простым соотношением:

$$n = n_q l_q. \tag{3.6.1}$$

Это равенство получается следующим образом. В окрестности изолированной точки ветвления q аналитическая функция $f(z)$ может быть представлена в виде:

$$f(z) = f(q) + \sum_{k=1}^{\infty} c_k (z - q)^{k/l_q}. \tag{3.6.2}$$

Согласно определению число значений $f(q)$ есть n_q; число же значений второго слагаемого в формуле (3.6.2) равно числу значений корня $(z - q)^{1/l_q}$, т. е. l_q. Отсюда следует, что общее число значений функции $f(z)$ во всякой точке z, не являющейся точкой ветвления, т. е. число листов n функции $f(z)$, равно произведению $n_q \cdot l_q$, как это и записано равенством (3.6.1).

Допустим теперь, что область M_z комплексной плоскости z, в которой задана наша функция $f(z)$, разбита на клетки, причем числа нульмерных клеток (вершин), одномерных клеток (ребер) и двумерных клеток (граней) равны соответственно $K_0(M_z)$, $K_1(M_z)$ и $K_2(M_z)$. Будем считать, что все точки ветвления, лежащие в M_z, являются вершинами клеточного разбиения. Это будет означать, что ни одна из точек ветвления не лежит на ребрах или гранях нашего клеточного разбиения (напомним, что все клетки являются открытыми шарами и не содержат своих границ, т. е. ребра — вершин, а грани — ребер и вершин). Клеточное разбиение M_z индуцирует клеточное разбиение римановой поверхности M рассматриваемой функции. Согласно сказанному, числа ребер $K_1(M)$ и граней $K_2(M)$ индуцированного клеточного разбиения римановой поверхности M дают соотношения

$$K_r(M) = nK_r(M_z); \quad r = 1, 2. \tag{3.6.3}$$

Что же касается числа вершин, то оно, очевидно, будет равно

$$K_0(M) = n\left[K_0(M_z) - \sum_q 1\right] + \sum_q n_q. \tag{3.6.4}$$

Здесь суммы по q распространены на все точки ветвления. Используя далее равенство (3.6.1), мы можем переписать выражение (3.6.4) в следующей форме:

$$K_0(M) = nK_0(M_z) - \sum_q n_q(l_q - 1). \tag{3.6.5}$$

С помощью формул (3.6.3) и (3.6.5) получаем соотношение между эйлеровыми характеристиками $\chi(M)$ римановой поверхности M и $\chi(M_z)$ области M_z комплексной плоскости z:

$$\chi(M) = n\chi(M_z) - \sum_q n_q(l_q - 1). \tag{3.6.6}$$

Это и есть формула Римана–Гурвица. Для алгебраической функции областью M_z может быть вся комплексная плоскость, гомеоморфная сфере (сфера Римана; формула (3.6.6) была написана Риманом имено для этого случая). Для функции же, имеющей не только корневые, но и логарифмические точки ветвления, M_z есть область, содержащая корневые и не содержащая логарифмические точки ветвления. В этом случае, очевидно, M_z гомеоморфно сфере с некоторым числом дырок. Заметим, что сумму в формуле (3.6.6) формально можно считать распространенной на все точки области q, так как для регулярных (неветвящихся) точек $l_q - 1 = 0$ и эти точки фактического вклада в указанную сумму не дадут.