3.7. Размерность пространства мероморфных функций (формула Римана–Роха)

Совокупность всех мероморфных функций, имеющих полюса кратностей, не превышающих заданных целых чисел $m_1, m_2, \dots, m_{s-1}, m_s$ соответственно в фиксированных точках $z_1, z_2, \dots, z_{s-1}, z_s = \infty$ комплексной плоскости переменной z, образует линейное пространство размерности

$$l = m + 1, \tag{3.7.1}$$

где

$$m = \sum_{i=1}^{s} m_i \tag{3.7.2}$$

есть сумма кратности полюсов. Действительно, произвольная функция такого типа может быть представлена в виде:

$$f(z) = \sum_{r=0}^{m_s} a_r z^r + \sum_{i=1}^{s-1} \sum_{k_i=1}^{m_i} \frac{\alpha_{i,k_i}}{(z - z_i)^{k_i}}. \tag{3.7.3}$$

Ясно, что линейная комбинация функций (3.7.2), отличающихся коэффициентами a_r и α_{ij}, но характеризующихся теми же z_i и m_i, будет опять-таки функцией типа (3.7.3). Каждая функция (3.7.2) при фиксированных z_i и m_i однозначно определяется заданием l «координат», т. е. чисел

$$\alpha_0, \dots, \alpha_{m_s}, \alpha_{1,1}, \dots, \alpha_{1,m_1}, \alpha_{s-1,1}, \dots, \alpha_{s-1,m_{s-1}}.$$

Любые $l + 1$ функций типа (3.7.3) обязательно линейно зависимы. Все сказанное равнозначно утверждению, что рассматриваемые мероморфные функции образуют линейное пространство размерности l, определяемой равенством (3.7.1).

Представим, что мы имеем некоторую алгебраическую функцию. Она, вообще говоря, будет мероморфна не на комплексной плоскости z, а на отвечающей данной функции римановой поверхности. Так же, как и в рассмотренном выше случае для плоскости множество мероморфных на определенной конечно-листной римановой поверхности функций, имеющих в фиксированных точках полюса, кратности которых не превышают заданных для каждого полюса чисел, является линейным пространством. Спрашивается, какова размерность этого пространства? Легко понять, что ответ будет не столь прост, как в разобранном случае для плоскостей. Например, на римановой поверхности функции

$$a+\frac{\sqrt{z^2-b}+\sqrt{z^2-c}}{z-z_1}$$

будут четыре простых (некратных) полюса, но размерность пространства мероморфных функций, имеющих простые полюса в этих точках римановой поверхности, равна всего лишь двум. Связь между суммой кратностей полюсов, родом римановой поверхности, т. е. числом ручек g, вклеенных в сферу, и размерностью пространства мероморфных функций на римановой поверхности определяется формулой Римана–Роха. Мы приведем здесь эту формулу без вывода, но поясним некоторые связанные с ее выводом понятия, имеющие более общую значимость. К числу таковых относится понятие *дивизора*. *Дивизором* называется формальная сумма:

$$D=\sum_{i=1}^{k} n_i a_i, \tag{3.7.4}$$

где a_i — точки римановой поверхности, а n_i — положительные или отрицательные целые числа; используя введенную ранее терминологию, можно сказать, что сумма (3.7.4) есть нульмерная цепь. Коэффициенты n_i называются порядками точек a_i и иногда обозначаются так:

$$n_i \equiv (\operatorname{ord} D)_i. \tag{3.7.5}$$

Говорят, что

$$D_1 > D_2, \tag{3.7.6}$$

если $(\operatorname{ord} D_1)_i > (\operatorname{ord} D_2)_i$ для всех точек i. Сумма всех n_i называется степенью *дивизора* D и обозначается символом deg

$$\deg D \equiv \sum_i (\operatorname{ord} D)_i. \tag{3.7.7}$$

Совокупность всех дивизоров, натянутых на точки $a_1, \ldots, a_k$, образует, очевидно, аддитивную группу. Ее подгруппой является множество дивизоров, для которых

$$\deg D = 0. \tag{3.7.8}$$

Дивизоры, удовлетворяющие равенству (3.7.8), называются главными. Они замечательны тем, что каждому такому дивизору отвечает мероморфная на данной римановой поверхности функция, имеющая в точках a_i нули или полюса. Дивизор, отвечающий мероморфной функции f, обозначается символом (f). Сопоставление мероморфной функции дивизора принято производить по правилу:

$$(\operatorname{ord}(f))_i < 0, \quad \text{если } a_i \text{ — полюс } f; \tag{3.7.9}$$

$$(\operatorname{ord}(f))_i > 0, \quad \text{если } a_i \text{ — нуль } f, \tag{3.7.10}$$

причем $|(\operatorname{ord}(f))_i|$ равен кратности соответственно полюса или нуля.

Поскольку у мероморфной функции сумма кратностей полюсов равна сумме кратностей нулей, то

$$\deg(f) = \sum_i (\operatorname{ord}(f))_i = 0 \tag{3.7.11}$$

и дивизор (f) является главным.

Важным является понятие размерности дивизора D. *Размерностью дивизора* D ($\dim D$) называется размерность пространства мероморфных функций, таких, что

$$(f) > -D. \tag{3.7.12}$$

Заметим, что если

$$D < 0,$$

то согласно определению (3.7.12)

$$\dim D = 0.$$

Далее, если $D = 0$, то, очевидно, $\dim D = 1$, поскольку в этом случае возможна лишь мероморфная функция, не имеющая полюсов, т. е. константа.

Среди дивизоров, помимо главных дивизоров, определенную роль играют так называемые канонические дивизоры C, которые отличаются тем, что их степень равна взятой с обратным знаком эйлеровой характеристике сферы с g ручками:

$$\deg C = 2g - 2 = \chi(P_g). \tag{3.7.13}$$

Канонические дивизоры C связаны с абелевыми дифференциалами, однако мы не можем здесь обсуждать этот аспект.

В терминах дивизоров теорема Римана–Роха может быть сформулирована следующим образом:

$$\dim D = \deg D - g + 1 + \dim(C - D). \tag{3.7.14}$$

Здесь g — род (число ручек) рассматриваемой римановой поверхности алгебраической функции, C — один из канонических дивизоров.

Пользуясь формулой (3.7.14), найдем размерность канонического дивизора. Полагая $D = C$ и учитывая, что $\dim(C - D = 0) = 1$, имеем

$$\dim C = 2g - 2 - g + 1 + 1 = g. \tag{3.7.15}$$

Далее легко установить, что если

$$\deg D > 2g - 2, \tag{3.7.16}$$

то

$$\dim(C - D) = 0. \tag{3.7.17}$$

Действительно, в этом случае

$$\deg(D - C) > 0 \tag{3.7.18}$$

и для главного дивизора (f), отвечающего мероморфной функции f, мы должны иметь

$$(f) > -(C - D) = D - C. \tag{3.7.19}$$

Отсюда следует

$$\deg(f) > \deg(D - C) > 0,$$

что невозможно, так как $\deg(f) = 0$, Это означает, что нет ни одной мероморфной функции, удовлетворяющей условию (3.7.19) или, другими словами, что размерность соответствующего пространства мероморфных функций равна нулю.

Резюмируя изложенное, на основе формулы Римана–Роха можем высказать следующее утверждение. Пусть сумма кратностей полюсов мероморфной функции на римановой поверхности рода g равна m. Тогда размерность l пространства мероморфных функций на этой римановой поверхности определяется формулой:

$$l = m - g + 1 + \delta, \quad \delta \geqslant 0, \tag{3.7.20}$$

причем заведомо

$$\delta = 0, \quad \text{если} \quad m > 2g - 2. \tag{3.7.21}$$

Для случая комплексной плоскости, которая гомеоморфна сфере S^2, ($g = 0$), неравенство (3.7.21) выполнено всегда и формула (3.7.20) переходит в выражение (3.7.1). Если же $g > 0$, то даже при $l = 2$ (наименьшая размерность, отвечающая пространству мероморфных функций, отличных от константы) число полюсов m может достигать значения

$$m = g + 1. \tag{3.7.22}$$

Из формул (3.7.20) и (3.7.21) следует также, что при $g = 1$ и $m \neq 0$,

$$m = l \geqslant 2. \tag{3.7.23}$$

Это значает, что отличная от константы ($l \geqslant 2$) мероморфная на торе функция должна иметь по меньшей мере два полюса или один двукратный, тогда как минимальное значение m для сферы равно единице. В более общем случае $g \geqslant 1$ из формулы Римана–Роха следует неравенство Киллинга:

$$m \geqslant 2l - 2, \quad g \geqslant 1. \tag{3.7.24}$$

3.8. Топологические аспекты многоканальной задачи

Нас будут интересовать топологические свойства римановой поверхности многоканальной S-матрицы. Мы будем предполагать, что все