что невозможно, так как $\deg(f) = 0$, Это означает, что нет ни одной мероморфной функции, удовлетворяющей условию (3.7.19) или, другими словами, что размерность соответствующего пространства мероморфных функций равна нулю.

Резюмируя изложенное, на основе формулы Римана–Роха можем высказать следующее утверждение. Пусть сумма кратностей полюсов мероморфной функции на римановой поверхности рода g равна m. Тогда размерность l пространства мероморфных функций на этой римановой поверхности определяется формулой:

$$l = m - g + 1 + \delta, \quad \delta \geqslant 0, \tag{3.7.20}$$

причем заведомо

$$\delta = 0, \quad \text{если} \quad m > 2g - 2. \tag{3.7.21}$$

Для случая комплексной плоскости, которая гомеоморфна сфере S^2, ($g = 0$), неравенство (3.7.21) выполнено всегда и формула (3.7.20) переходит в выражение (3.7.1). Если же $g > 0$, то даже при $l = 2$ (наименьшая размерность, отвечающая пространству мероморфных функций, отличных от константы) число полюсов m может достигать значения

$$m = g + 1. \tag{3.7.22}$$

Из формул (3.7.20) и (3.7.21) следует также, что при $g = 1$ и $m \neq 0$,

$$m = l \geqslant 2. \tag{3.7.23}$$

Это значает, что отличная от константы ($l \geqslant 2$) мероморфная на торе функция должна иметь по меньшей мере два полюса или один двукратный, тогда как минимальное значение m для сферы равно единице. В более общем случае $g \geqslant 1$ из формулы Римана–Роха следует неравенство Киллинга:

$$m \geqslant 2l - 2, \quad g \geqslant 1. \tag{3.7.24}$$

3.8. Топологические аспекты многоканальной задачи

Нас будут интересовать топологические свойства римановой поверхности многоканальной S-матрицы. Мы будем предполагать, что все каналы двухчастичные и, следовательно, все пороговые точки ветвления корневые ($l_q = 2$). Далее примем, что частицы в каждом из каналов нерелятивистские, имеют равные массы и равные нулю спины (последнее условие введено из желания избежать мешающих выявлению существа дела алгебраических усложнений). Наконец, мы будем считать, что число открытых каналов при любой сколь угодно большой энергии начального состояния конечно и не превышает N. Массу наиболее тяжелой частицы обозначим через m_1. Подразумевается, что вырождения нет (разные частицы имеют разные массы). Таким образом,

$$m_s < m_1, \quad s = 2, 3, \dots, N. \tag{3.8.1}$$

При указанных выше ограничениях закон сохранения энергии дает

$$2m_i + \frac{p_i^2}{m_i} = 2m_j + \frac{p_j^2}{m_j}, \quad i, j = 1, 2, \dots, N. \tag{3.8.2}$$

Здесь p_i, p_j — импульсы в с. ц. и. Для дальнейшего удобно ввести переменные:

$$k_i = \frac{p_i}{\sqrt{m_i}}, \quad i = 1, \dots, N. \tag{3.8.3}$$

Тогда из выражения (3.8.2) имеем

$$k_s = \sqrt{Q_s^2 + k_1^2}, \quad Q_s^2 = 2(m_1 - m_s) > 0, \quad s = 2, 3, \dots, N. \tag{3.8.4}$$

Рассмотрим парциальную волну с определенным угловым моментом. S-матрица в этом случае будет матрицей $N \times N$, зависящей от переменных k_i, а фактически — от одной переменной k_1, как это видно из выражения (3.8.4). Заметим, что из унитарности и T-инвариантности S-матрицы следует соотношение

$$S^*(k_1, \dots, k_N) = S(-k_1^*, \dots, -k_N^*). \tag{3.8.5}$$

При подходящем выборе разрезов в комплексной плоскости k_1 можно получить[1]

$$k_s(-k_1^*) = -k_s^*(k_1). \tag{3.8.6}$$

[1]Мы придем к этому соотношению, проведя в плоскости разрезы по мнимой оси от точек iQ_s до точек $-iQ$.

Тогда равенство (3.8.5) сведется по существу к условию симметрии одноканальной задачи:

$$S^*(k_1) = S(-k_1^*). \tag{3.8.7}$$

Итак, матричные элементы S-матрицы являются в рассматриваемом случае аналитическими функциями переменной k_1, имеющими $N-1$ пар корневых точек ветвления с порядками ветвления $l_q = 2$. Поскольку каждая переменная $k_s(k_1)$, как функция от k_1, двузначна, число листов n римановой поверхности, происходящих от пороговых ветвлений, будет, очевидно, таким:

$$n = 2^{N-1}. \tag{3.8.8}$$

Если вместо переменной k_1 рассматривать энергию $E_1 = k_1^2$, то добавится еще одно ветвление второго порядка и число листов S-матрицы как функции переменной E_1 увеличится

$$E_1:\ n = 2^N. \tag{3.8.9}$$

Помимо унитарных разрезов, о которых шла речь выше, S-матрица испытывает скачки еще на так называемых динамических разрезах, обусловленных взаимодействием. Динамические разрезы не будут здесь интересовать нас: они могут трактоваться либо как дырки в римановой поверхности, возникшей за счет пороговых ветвлений, либо вообще в определенном («сепарабельном») приближении могут быть заменены полюсами (в этом случае S-матрица будет мероморфна на «пороговой» римановой поверхности).

С помощью формулы Римана–Гурвица (3.6.6) определим род римановой поверхности S-матрицы N-канальной задачи. Согласно сказанному выше в этом случае для всех точек ветвления по переменной k_1 имеем

$$k_1 : l_q - 1 = 1, \quad n_q = \frac{n}{2} = 2^{N-2}; \tag{3.8.10}$$

общее же число точек ветвления равно $2(N-2)$. Таким образом,

$$k_1:\ \sum_q n_q(l_q - 1) = (N-1)2^{N-1} \tag{3.8.11}$$

и для эйлеровой характеристики римановой поверхиости $\chi(M_N)$, полагая $\chi(M_z) = \chi(S^2) = 2$, получаем

$$k_1 : \chi(M_N) = 2^{N-1}2 - (N-1)2^{N-1} = 2^{N-1}(3-N). \qquad (3.8.12)$$

Так как род $g(M_N)$ (число ручек) поверхности M_N связан с $\chi(M_N)$ соотношением:

$$g(M_N) = 1 - \frac{\chi(M_N)}{2}, \qquad (3.8.13)$$

то, подставив выражение (3.8.12) в формулу (3.8.13), найдем

$$g(M_N) = 2^{N-2}(N-3) + 1, \quad N \geqslant 1. \qquad (3.8.14)$$

Из этой формулы следует

$$g(M_1) = g(M_2) = 0, \quad M_1 \sim M_2 \sim S^2, \qquad (3.8.15)$$

т. е. что римановы поверхности одноканальной и двухканальной S-матриц топологически эквивалентны друг другу и гомеоморфны сфере S^2. Многоканальность сказывается на топологических свойствах M_N, начиная с $N = 3$. Для $N = 3$ формула (3.8.14) дает

$$g(M_3) = 1, \quad M_3 = P_1. \qquad (3.8.16)$$

Таким образом, M_3 гомеоморфна тору. Как может проявиться различие сферы и тора в свойствах S-матрицы, обсудим ниже. Предварительно же найдем род римановой поверхности переменной E_1. В этом случае имеем

$$E_1 : l_q - 1 = 1, \quad n_q = \frac{n}{2} = 2^{N-1}. \qquad (3.8.17)$$

Общее число точек ветвления равно $N + 1$, так как, кроме N-порогов, точкой ветвления является еще и бесконечно удаленная точка. Отсюда следует

$$E_1 : \sum_q n_q(l_q - 1) = (N+1)2^{N-1} \qquad (3.8.18)$$

и в соответствии с формулой (3.6.6) получаем

$$E_1\colon\ \chi(M_N) = 2^{N-1}(3-N), \tag{3.8.19}$$

т. е. ту же формулу, что и для римановой поверхности по переменной k_1, хотя числа листов и точек ветвления в обоих случаях неодинаковы. Уже это обстоятельство указывает на то, что топологические инварианты римановой поверхности улавливают нечто относящееся к физическому существу многоканального процесса, а не к способу его описания в отличие от конкретной многолистной реализации римановой поверхности, выглядящей совершенно различно для различных переменных.

Чтобы продемонстрировать влияние топологических характеристик римановой поверхности на свойства многоканальной S-матрицы, рассмотрим упоминавшееся выше сепарабельное приближение, в котором все динамические разрезы заменены полюсами и, следовательно, S-матрица мероморфна на сфере с g ручками P_g. Тогда из формулы (3.7.24) вытекает, что даже при самой «бедной» динамике, при которой элементы S-матрицы «едва» отличны от констант, т. е. наименьшей размерности $l = 2$ пространства мероморфных функций, число полюсов $m(N)$ в N-канальном случае при $n \geqslant 3$ должно быть ***больше двух***

$$m(N) \geqslant 2. \tag{3.8.20}$$

Вообще же даже при $l = 2$ число полюсов S-матрицы может достигать значения (см. формулу (3.7.22)):

$$m(N) = 2^{N-2}(N-3) + 2, \quad N \geqslant 1 \tag{3.8.21}$$

Вместе с тем в одно- и двухканальном случаях при $l = 2$ возможен лишь один полюс.

Мы не рассматриваем здесь вопрос о связи размерности пространства мероморфных функций с конкретной физической параметризацией динамики многоканальной задачи — это увело бы нас слишком далеко от основного направления данных лекций. Мы не будем также рассматривать оценок на числа полюсов и нулей многоканальной S-матрицы, базирующихся на неравенствах Морса. Наша цель в этом разделе заключалась в том, чтобы показать, каким образом топологический подход помогает получить представление в целом о специфике многоканального процесса по сравнению с одноканальным. Мы убедились, что уже самое начальное исследование в этом направлении позволяет различить «с какого N начинается многоканальный случай» (таким критическим числом является $N = 3$). Мы видели также, что сам факт увеличения числа каналов по чисто геометрическим причинам может качественно сказаться на свойствах физической системы, если, конечно, связь между каналами не мала. Подчеркивая «геометрический» характер этих качественных изменений, мы имеем ввиду отдалить привычные модификации за счет, например, усиления взаимодействия между частицами, которые имеют место и в одноканальном случае. С увеличением числа достаточно сильно связанных каналов возникают и новые особенности, обусловленные причинами такого рода, поскольку появляются дополнительные «диагональные» взаимодействия, вызванные виртуальными переходами типа канал $j \to$ канал $S \to$ канал j. Использование же топологических методов позволяет понять, что, помимо таких эффектов, в многоканальных процессах имеется довольно глубоко скрытая специфика, слабо зависящая от конкретной динамической модели.

Литература

[1] *Болтянский В. Г., Ефремов В. А.* Очерк основных идей топологии. — «Математическое просвещение» 1957, №2, 1958, №3, 1959, №4, 1961, № 6.

[2] *Гильберт Д., Кон-Фоссен С.* Наглядная геометрия. Пер. с нем. М., ОНТИ, 1936.

[3] *Шварц Дж.* Дифференциальная геометрия и топология. Пер. с анг. М., «Мир», 1970.

[4] *Хуа Р., Теплиц В.* Гомология и фейнмановские интегралы. Пер. с англ. М., 1969.

[5] *Фам Ф.* Введение в топологические исследования Ландау. Пер. с англ. М., «Мир», 1970.

[6] *Фет А. И.* Топология и вариационное исчисление. Вторая летняя математическая школа. Киев, «Наукова думка», 1965.

[7] *Matveev V. B.* Abelian functions and solutions. Wroclaw, 1976.