

Уравнение состояния холодного вещества ниже точки образования нейтронных капель

В основе теории компактных объектов лежат физические категории двух различных типов. Эти категории в широком смысле можно охарактеризовать как «глобальные» и «локальные». Глобальные свойства описывают крупномасштабный динамический отклик материи на воздействие гравитации, электромагнитных полей, вращения и т.д. Эти глобальные свойства определяются уравнениями движения материи. В дополнение к членам, описывающим гравитацию, электромагнитные поля и т.п., уравнения движения включают эффекты внутренних натяжений, таких, как, например, градиент давления и потери энергии из-за вязкости или излучения. Величины, подобные давлению, вязкости или излучательной способности, обычно выражают локальные свойства вещества, которые определяются локальным термодинамическим состоянием отдельного элемента вещества.

В последующих главах мы рассмотрим как локальные, так и глобальные свойства компактных объектов. Начнем с микрофизики, которая необходима для изучения белых карликов, а именно с уравнения состояния (соотношения между плотностью и давлением) до режима образования нейтронных капель (плотность меньше $\sim 4 \cdot 10^{11}$ г/см³). При подходящей модификации часть этого рассмотрения может быть перенесена на случай нейтронной звезды.

Прежде всего мы сделаем обзор основных термодинамических соотношений, которые будут широко использованы в последующем изложении.

2.1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕРМОДИНАМИКИ

Обычно термодинамические величины относят к некоторому определенному числу частиц N в объеме V . Релятивистская инвариантность термодинамики выглядит более прозрачной, если все величины описывают измерения, сделанные в локально сопутствующей инерциональной системе, *движущейся* вместе с веществом. Таким образом, мы представим себе локальную лоренцеву систему, движущуюся с той же скоростью, что и данный элемент среды. Пусть n — концентрация барионов, измеренная в этой системе, а ε — полная плотность энергии (включающая энергию покоя). Тогда ε/n — энергия, приходящаяся на один барион. Различные величины удобно определять в расчете на один барион, так как барионное число

сохраняется¹⁾. Первый закон термодинамики имеет следующую общую форму:

$$dQ = d\left(\frac{\varepsilon}{n}\right) + Pd\left(\frac{1}{n}\right), \quad (2.1.1)$$

где dQ — количество теплоты, полученное в пересчете на один барион, P — давление, а $1/n$ — объем, приходящийся на один барион. Черточка в dQ напоминает, что эта величина не есть полный дифференциал.

Если в элементе среды, который все время находится в равновесии, протекает какой-либо процесс, то

$$dQ = T ds, \quad (2.1.2)$$

где s — энтропия на один барион, а T — температура. Объединяя уравнения (2.1.1) и (2.1.2), получим в равновесии

$$d\left(\frac{\varepsilon}{n}\right) = -Pd\left(\frac{1}{n}\right) + T ds. \quad (2.1.3)$$

При написании уравнения (2.1.3) молчаливо предполагалось, что ε/n является функцией только n и s , т.е. $\varepsilon = \varepsilon(n, s)$. Вообще говоря, плотность энергии системы, содержащей различные типы частиц, зависит от относительности количества этих частиц, а также от объема $1/n$ и значения s . Если определить относительную концентрацию частиц i -го сорта как

$$Y_i \equiv \frac{n_i}{n}, \quad (2.1.4)$$

где n_i — концентрация частиц сорта i , то

$$\varepsilon = \varepsilon(n, s, Y_i). \quad (2.1.5)$$

Следовательно, в общем случае следует написать

$$d\left(\frac{\varepsilon}{n}\right) = -Pd\left(\frac{1}{n}\right) + T ds + \sum_i \mu_i dY_i, \quad (2.1.6)$$

где

$$P \equiv \frac{-\partial(\varepsilon/n)}{\partial(1/n)} = n^2 \frac{\partial(\varepsilon/n)}{\partial n}, \quad (2.1.7)$$

$$T \equiv \frac{\partial(\varepsilon/n)}{\partial s}, \quad (2.1.8)$$

¹⁾ Мы пренебрежем реакциями с несохранением барионов и лептонов, которые могли бы происходить при сверхвысоких энергиях ($> 10^{15}$ ГэВ) в некоторых теориях «великого объединения» (см., например, [607]). В этом случае было бы необходимо явно ввести объем данного элемента жидкости.

$$\mu_i \equiv \frac{\partial(\varepsilon/n)}{\partial Y_i} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial n_i}. \quad (2.1.9)$$

Величина μ_i называется *химическим потенциалом* частиц сорта i . Ее можно интерпретировать как изменение плотности энергии при изменении на единицу концентрации частиц сорта i при постоянных давлении, энтропии и концентрации частиц остальных типов. Заметим, что поскольку ε по определению включает в себя энергию покоя, то же самое справедливо и для μ_i .

В равновесии реакции между частицами приводят к состоянию с детальным равновесием, когда каждая реакция уравнивается ей обратной и относительная концентрация частиц каждого сорта остается постоянной. Таким образом, в равновесии не все относительные концентрации Y_i независимы от других термодинамических величин. Равновесные соотношения можно определить следующим образом.

Рассмотрим сначала специальный случай, когда система бесконечно близка к равновесию. Разрешены реакции, которые приводят систему к равновесию, но система теплоизолирована ($dQ = 0$) и объем ее фиксирован, так что над ней не производится никакой работы. В этом случае уравнение (2.1.1) дает $d(\varepsilon/n) = 0$, т.е. энергия системы остается постоянной. Реакции порождают энтропию, но так как в равновесии энтропия максимальна (согласно второму закону термодинамики), то в первом приближении $ds = 0$. Таким образом, в равновесии уравнение (2.1.6) дает

$$\sum_i \mu_i dY_i = 0. \quad (2.1.10)$$

Допустим, например, что рассматривается равновесие относительно реакции



Тогда $dY_e = dY_p = -dY_n = -dY_{\nu_e}$ и, следовательно,

$$\mu_e + \mu_p = \mu_n + \mu_{\nu_e}. \quad (2.1.12)$$

Подобные же соотношения между химическими потенциалами справедливы для любой реакции, которая приводит к равновесию. Если химические потенциалы известны (например, из статистической механики) как функции состава при соответствующих значениях n и s или n и ε , тогда уравнение (2.1.10) определяет равновесные относительные концентрации.

Даже когда начальное состояние очень далеко от равновесия, но система приближается к равновесию с $dQ = 0$ и $dn = 0$, то ее энергия по-прежнему остается постоянной. В конце концов она будет бесконечно близка к равновесию и приведенные выше соображения станут применимы. Таким образом, можно снова определить состав, если известны химические потенциалы при фиксированных значениях n и ε .

Теперь рассмотрим общий случай, когда система не обязательно теплоизолирована и над ней может производиться работа. Если система достигает равновесия за счет квазистатических реакций, то $Tds = dQ$. Однако в общем случае второй закон термодинамики требует

$$dQ \leq T ds. \quad (2.1.13)$$

В силу сохранения энергии уравнение (2.1.1) приводит к результату:

$$d\left(\frac{\varepsilon}{n}\right) + P d\left(\frac{1}{n}\right) \leq T ds. \quad (2.1.14)$$

Если равновесие достигается при постоянных n и s , то уравнение (2.1.14) дает

$$d\varepsilon \leq 0. \quad (2.1.15)$$

Равновесное состояние соответствует отсутствию какого-либо изменения ε (т.е. $d\varepsilon = 0$), и, очевидно, в равновесии значение ε минимально при фиксированных n и s . Используя уравнение (2.1.6), с помощью этого принципа можно восстановить уравнение (2.1.10).

Аналогично, если T и n сохраняются постоянными, уравнение (2.1.14) дает

$$df \leq 0, \quad (2.1.16)$$

где

$$f \equiv \frac{\varepsilon}{n} - Ts \quad (2.1.17)$$

есть свободная энергия в расчете на один барион.

Если T и P постоянны (это наиболее частая ситуация, встречающаяся на практике), то

$$dg \leq 0, \quad (2.1.18)$$

где

$$g \equiv \frac{\varepsilon + P}{n} - Ts \quad (2.1.19)$$

— термодинамический потенциал Гиббса в расчете на один барион. Равновесие соответствует минимуму g при постоянных T и P . Последнее выражение для условия равновесия особенно удобно, когда происходят фазовые переходы, сопровождаемые скачком в n при непрерывных T и P (см. разд. 2.7).

Используя уравнение (2.1.6), из (2.1.19) найдем

$$dg = \frac{1}{n} dP - s dT + \sum_i \mu_i dY_i. \quad (2.1.20)$$

Таким образом, требование, чтобы g было минимальным при постоянных T и P , снова приводит к уравнению (2.1.10).

Величины, подобные энергии, объему, энтропии и числу частиц, называются *экстенсивными* величинами: при делении некоторого объема пополам энергия, энтропия и число частиц в каждой части равны половине своего значения для целого объема. Величины типа давления и температуры, которые при этом не меняются, называются *интенсивными* величинами. Требование, чтобы все экстенсивные величины данной системы изменялись при изменении объема одинаково, приводит к соотношению¹⁾

$$g = \sum_i \mu_i Y_i. \quad (2.1.21)$$

Теперь уточним количество независимых термодинамических величин, необходимых для описания равновесного состояния. Рассмотрим для наглядности взаимодействующую смесь барионов (включающих, например, нейтроны и протоны) и лептонов (включающих электроны, мюоны и соответствующие нейтрино). Все реакции в заданном объеме сохраняют плотность барионного числа n , электронного лептонного числа ${}^2)n_{Le}$ и мюонного лептонного числа $n_{L\mu}$, а также плотность электрического заряда n_Q . Выберем четыре основных химических потенциала, соответствующие этим четырем сохраняющимся величинам, например, следующим образом: μ_p (связанный с n), μ_n (связанный с n_{Le}), μ_μ (связанный с $n_{L\mu}$) и μ_e (связанный с n_Q). Тогда в равновесии все остальные химические потенциалы будут линейными комбинациями этих четырех. Так, например, уравнение (2.1.12) определяет μ_{ν_e} из реакции (2.1.11).

Получаем, что все термодинамические величины, связанные с частицами сорта i , в равновесии являются функциями только T и μ_j . (В следующем разделе это будет показано явно для случая идеальных газов.) Итак, в общем случае для полного описания равновесного состояния необходимо задать T и четыре величины μ_j . Эквивалентно можно задать любые пять независимых термодинамических величин. Обычно $n_Q = 0$, так что требуются только четыре величины.

Ниже в этой главе мы рассмотрим идеальный газ при $T = 0$ и условии, что нейтрино могут уходить из системы. Это эквивалентно такому выбору n_{Le} и $n_{L\mu}$, что химические потенциалы всех нейтрино равны нулю. Поскольку T , n_Q , n_{Le} и $n_{L\mu}$ заданы, все термодинамические величины этой си-

¹⁾ Вывод (с использованием иных обозначений) см., например, в книге [479, с. 314].

²⁾ Здесь и далее по всей книге предполагается, что нейтрино — это *безмассовые* фермионы со спином $1/2$ и определенной спиральностью, причем соответствующие антинейтрино имеют противоположную спиральность. Если нейтрино не являются безмассовыми частицами, то возможны в принципе нейтринные осцилляции, вследствие чего физические нейтрино будут смесью электронного, мюонного и тау-нейтрино. В этом случае электронное, мюонное и тау лептонные числа по отдельности не сохраняются.

стемы зависят только от *одного* параметра, например от плотности барионного числа.

В ряде случаев можно использовать понятие *ограниченного* равновесия. Это означает, что некоторые реакции, необходимые для достижения полного равновесия, являются слишком медленными в представляющем интерес временном масштабе. Это приводит к тому, что возникает *более* четырех сохраняющихся величин и нужно задать большее количество n_i для описания системы. Например, характерное динамическое время для звезды обычно много меньше, чем время, которое необходимо для изменения состава звезды вследствие ядерных реакций. Чтобы определить давление, внутреннюю энергию и т.п. в звезде, необходимо явно задать относительные концентрации H, He и т.д., а не только просто барионную концентрацию n . Подобная ситуация, как правило, возникает и при исследовании химических реакций в земных лабораториях.

2.2. СВЕДЕНИЯ ИЗ КИНЕТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ

В кинетической теории плотности распределения частиц каждого типа в фазовом пространстве $d^3\mathcal{N}/d^3x d^3p$ полностью описывают систему. Эквивалентно можно задать безразмерную *функцию распределения* в фазовом пространстве $f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)$, определенную согласно равенству

$$\frac{d^3\mathcal{N}}{d^3x d^3p} = \frac{g}{h^3} f. \quad (2.2.1)$$

Здесь h^3 — объем ячейки в фазовом пространстве (h — постоянная Планка), а g — статистический вес, т.е. число состояний частицы с заданной величиной импульса \mathbf{p} . Для массивных частиц $g = 2S + 1$ (S — спин), для фотонов $g = 2$, для нейтрино $g = 1$. Функция f определяет среднее число заполнения ячейки в фазовом пространстве¹⁾.

Упражнение 2.1. Покажите, что $d^3x d^3p$ есть лоренц-инвариант (т.е. скаляр относительно преобразований Лоренца) и, следовательно, f также лоренц-инвариант.

Концентрация частиц каждого типа задается выражением

$$n = \int \frac{d^3\mathcal{N}}{d^3x d^3p} d^3p, \quad (2.2.2)$$

где интеграл берется по всем импульсам. Плотность энергии равна

$$\varepsilon = \int E \frac{d^3\mathcal{N}}{d^3x d^3p} d^3p, \quad (2.2.3)$$

¹⁾ Из контекста нетрудно понять, когда символы f или g используются для обозначения свободной энергии, как в разд. 2.1.