стемы зависят только от *одного* параметра, например от плотности барионного числа.

В ряде случаев можно использовать понятие *ограниченного* равновесия. Это означает, что некоторые реакции, необходимые для достижения полного равновесия, являются слишком медленными в представляющем интерес временном масштабе. Это приводит к тому, что возникает *более* четырех сохраняющихся величин и нужно задать большее количество n_i для описания системы. Например, характерное динамическое время для звезды обычно много меньше, чем время, которое необходимо для изменения состава звезды вследствие ядерных реакций. Чтобы определить давление, внутреннюю энергию и т.п. в звезде, необходимо явно задать относительные концентрации H, He и т.д., а не только просто барионную концентрацию n. Подобная ситуация, как правило, возникает и при исследовании химических реакций в земных лабораториях.

2.2. СВЕДЕНИЯ ИЗ КИНЕТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ

В кинетической теории плотности распределения частиц каждого типа в фазовом пространстве $d\mathcal{N}/d^3x\, d^3p$ полностью описывают систему. Эквивалентно можно задать безразмерную *функцию распределения* в фазовом пространстве $f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)$, определенную согласно равенству

$$\frac{d\mathcal{N}}{d^3x\, d^3p} = \frac{g}{h^3} f. \tag{2.2.1}$$

Здесь h^3 —объем ячейки в фазовом пространстве (h — постоянная Планка), а g — статистический вес, т.е. число состояний частицы с заданной величиной импульса $\mathbf{p}$. Для массивных частиц $g = 2S + 1$ (S — спин), для фотонов $g = 2$, для нейтрино $g = 1$. Функция f определяет среднее число заполнения ячейки в фазовом пространстве[1].

Упражнение 2.1. Покажите, что d^3xd^3p есть лоренц-инвариант (т.е. скаляр относительно преобразований Лоренца) и, следовательно, f также лоренц-инвариант.

Концентрация частиц каждого типа задается выражением

$$n = \int \frac{d\mathcal{N}}{d^3x\, d^3p} d^3p, \tag{2.2.2}$$

где интеграл берется по всем импульсам. Плотность энергии равна

$$\varepsilon = \int E \frac{d\mathcal{N}}{d^3x\, d^3p} d^3p, \tag{2.2.3}$$

[1] Из контекста нетрудно понять, когда символы f или g используются для обозначения свободной энергии, как в разд. 2.1.

где

$$E = (p^2c^2 + m^2c^4)^{1/2}, \; m \text{ — масса покоя частицы.} \tag{2.2.4}$$

Заметим, что ε *включает в себя* энергию покоя частиц. Давление в системе с изотропным распределением по импульсам равно

$$P = \frac{1}{3}\int pv \frac{d\mathcal{N}}{d^3x\, d^3p} d^3p, \tag{2.2.5}$$

где скорость v равна $v = pc^2/E$. Это соотношение отражает просто тот факт, что давление представляет собой поток импульса, а множитель 1/3 появляется вследствие изотропии.

Для равновесного идеального газа функция f имеет простой вид:

$$f(E) = \frac{1}{\exp[(E-\mu)/kT] \pm 1}, \tag{2.2.6}$$

где верхний знак относится к фермионам (статистика Ферми — Дирака), а нижний — к бозонам (статистика Бозе — Эйнштейна). Здесь k — постоянная Больцмана, а μ — химический потенциал.

При достаточно низкой концентрации частиц и высокой температуре $f(E)$ сводится к распределению Максвелла—Больцмана:

$$f(E) \approx \exp\left(\frac{\mu - E}{kT}\right). \tag{2.2.7}$$

В этом случае $f(E) \ll 1$.

Для полностью вырожденных фермионов ($T \to 0$, т.е. $\mu/kT \to \infty$) μ называется *энергией Ферми* E_F и

$$f(E) = \begin{cases} 1, & E \leqslant E_F \\ 0, & E > E_F. \end{cases} \tag{2.2.8}$$

2.3. УРАВНЕНИЕ СОСТОЯНИЯ ПОЛНОСТЬЮ ВЫРОЖДЕННОГО ИДЕАЛЬНОГО ФЕРМИ—ГАЗА

Изолированный белый карлик или нейтронная звезда в конце концов охлаждаются до нулевой температуры, и только давление, присущее материи при $T = 0$, удерживает их от гравитационного коллапса. Простейшее уравнение состояния холодного вырожденного вещества — это уравнение состояния отдельных типов идеальных (невзаимодействующих) фермионов. Ниже мы продолжим обзор этого случая[1]. В следующих разделах будут рассмотрены более реалистичные, но и более сложные уравнения состояния, описывающие вырожденное вещество в компактных звездах.

[1] Более подробное обсуждение см. в книгах [114] или [135].