где

$$E = (p^2c^2 + m^2c^4)^{1/2}, \ m \text{ — масса покоя частицы.} \tag{2.2.4}$$

Заметим, что ε *включает в себя* энергию покоя частиц. Давление в системе с изотропным распределением по импульсам равно

$$P = \frac{1}{3}\int pv \frac{d\mathfrak{N}}{d^3x\, d^3p} d^3p, \tag{2.2.5}$$

где скорость v равна $v = pc^2/E$. Это соотношение отражает просто тот факт, что давление представляет собой поток импульса, а множитель 1/3 появляется вследствие изотропии.

Для равновесного идеального газа функция f имеет простой вид:

$$f(E) = \frac{1}{\exp[(E - \mu)/kT] \pm 1}, \tag{2.2.6}$$

где верхний знак относится к фермионам (статистика Ферми — Дирака), а нижний — к бозонам (статистика Бозе — Эйнштейна). Здесь k — постоянная Больцмана, а μ — химический потенциал.

При достаточно низкой концентрации частиц и высокой температуре $f(E)$ сводится к распределению Максвелла—Больцмана:

$$f(E) \approx \exp\left(\frac{\mu - E}{kT}\right). \tag{2.2.7}$$

В этом случае $f(E) \ll 1$.

Для полностью вырожденных фермионов ($T \to 0$, т.е. $\mu/kT \to \infty$) μ называется *энергией Ферми* E_F и

$$f(E) = \begin{cases} 1, & E \leqslant E_F \\ 0, & E > E_F. \end{cases} \tag{2.2.8}$$

2.3. УРАВНЕНИЕ СОСТОЯНИЯ ПОЛНОСТЬЮ ВЫРОЖДЕННОГО ИДЕАЛЬНОГО ФЕРМИ—ГАЗА

Изолированный белый карлик или нейтронная звезда в конце концов охлаждаются до нулевой температуры, и только давление, присущее материи при $T = 0$, удерживает их от гравитационного коллапса. Простейшее уравнение состояния холодного вырожденного вещества — это уравнение состояния отдельных типов идеальных (невзаимодействующих) фермионов. Ниже мы продолжим обзор этого случая[1]. В следующих разделах будут рассмотрены более реалистичные, но и более сложные уравнения состояния, описывающие вырожденное вещество в компактных звездах.

[1] Более подробное обсуждение см. в книгах [114] или [135].

Если определить *импульс Ферми* p_F согласно равенству

$$E_F \equiv \left(p_F^2 c^2 + m_e^2 c^4\right)^{1/2}, \tag{2.3.1}$$

то уравнения (2.2.2) и (2.2.8) дадут

$$n_e = \frac{2}{h^3}\int_0^{p_F} 4\pi p^2\, dp = \frac{8\pi}{3h^3} p_F^3. \tag{2.3.2}$$

Удобно ввести безразмерный импульс Ферми или «релятивистский параметр» x выражением

$$x = \frac{p_F}{m_e c}. \tag{2.3.3}$$

Тогда

$$n_e = \frac{1}{3\pi^2 \lambda_e^3} x^3, \tag{2.3.4}$$

где $\lambda_e = \hbar/m_e c$ — комптоновская длина волны электрона.

Давление определяется равенством (2.2.5):

$$P_e = \frac{1}{3}\frac{2}{h^3}\int_0^{p_F} \frac{p^2 c^2}{\left(p^2 c^2 + m_e^2 c^4\right)^{1/2}} 4\pi p^2\, dp = \frac{8\pi m_e^4 c^5}{3h^3}\int_0^x \frac{x^4\, dx}{\left(1 + x^2\right)^{1/2}} =$$

$$= \frac{m_e c^2}{\lambda_e^3}\phi(x) = 1{,}42180 \times 10^{25}\phi(x)\ \text{дин/см}^2, \tag{2.3.5}$$

где

$$\phi(x) = \frac{1}{8\pi^2}\left\{x\left(1 + x^2\right)^{1/2}\left(2x^2/3 - 1\right) + \ln\left[x + \left(1 + x^2\right)^{1/2}\right]\right\}. \tag{2.3.6}$$

Аналогично равенство (2.2.3) дает

$$\varepsilon_e = \frac{2}{h^3}\int_0^{p_F}\left(p^2 c^2 + m_e^2 c^4\right)^{1/2} 4\pi p^2\, dp = \frac{m_e c^2}{\lambda_e^3}\chi(x), \tag{2.3.7}$$

где

$$\chi(x) = \frac{1}{8\pi^2}\left\{x\left(1 + x^2\right)^{1/2}\left(1 + 2x^2\right) - \ln\left[x + \left(1 + x^2\right)^{1/2}\right]\right\}. \tag{2.3.8}$$

Даже в ситуации, когда вырожденные электроны вносят основной вклад в давление, в плотности обычно преобладает масса покоя ионов. Эта плотность равна

$$\rho_0 = \sum_i n_i m_i, \tag{2.3.9}$$

где m_i — масса ионов сорта i. Если мы определим среднюю массу бариона как

$$m_{\mathrm{B}} \equiv \frac{1}{n} \sum_i n_i m_i = \frac{\sum_i n_i m_i}{\sum_i n_i A_i}, \tag{2.3.10}$$

где A_i — барионное число (целая часть атомного веса) ионов i-го сорта, то

$$\rho_0 = n m_{\mathrm{B}} = \frac{n_e m_{\mathrm{B}}}{Y_e}. \tag{2.3.11}$$

Здесь Y_e — среднее число электронов на один барион, как в равенстве (2.1.4). Например, для полностью ионизованного чистого ^{12}C $m_{\mathrm{B}} = m_u = 1{,}66057 \cdot 10^{-24}$ г (атомная единица массы) и $Y_e = Z/A = 0{,}5$. Поэтому

$$\rho_0 = 1{,}9479 \times 10^6 x^3 \ \text{г/см}^3. \tag{2.3.12}$$

Иногда используют величину

$$\mu_e = \frac{m_{\mathrm{B}}}{m_u Y_e} \tag{2.3.13}$$

(средний молекулярный вес на один электрон), так что

$$\rho_0 = \mu_e m_u n_e = 0{,}97395 \times 10^6 \mu_e x^3 \ \text{г/см}^3. \tag{2.3.14}$$

или

$$x = 1{,}0088 \times 10^{-2} \left(\frac{\rho_0}{\mu_e} \right)^{1/3}, \tag{2.3.15}$$

где ρ_0 выражается в г/см^3. Часто в равенстве (2.3.13) можно пренебречь различием между m_{B} и m_u. Например, для полностью ионизованного элемента с атомным весом A и номером Z можно записать $\mu_e = A/Z$ с точностью примерно 10^{-4}.

Аналогично для определения плотности иногда используется средний молекулярный вес μ. Тогда выражение для плотности выглядит так:

$$\rho_0 = \left(n_e + \sum_i n_i \right) \mu m_u. \tag{2.3.16}$$

Отсюда с помощью равенства (2.3.11) получим

$$\frac{1}{\mu} = \left(Y_e + \sum_i Y_i \right) \frac{m_u}{m_{\mathrm{B}}}. \tag{2.3.17}$$

Здесь снова можно положить $m_u/m_{\mathrm{B}} = 1$. Отличие этого отношения от 1 существенно только в случае очень точных вычислений. Понятие среднего молекулярного веса оказывается особенно полезным при отсутствии вырождения, когда давление определяется выражением, справедливым для классического идеального газа:

$$P = \left(n_e + \sum_i n_i\right)kT = \frac{\rho_0}{\mu m_u}kT. \tag{2.3.18}$$

Выражения (2.3.5) и (2.3.14) определяют параметрически через x уравнение состояния идеального вырожденного газа $P = P(\rho_0)$. (Заметим, что $\rho = \rho_0 + \varepsilon/c^2$ — полная плотность энергии и обычно член ε/c^2 пренебрежимо мал.)

Упражнение 2.2. Покажите, что в пределе $x \ll 1$ (нерелятивистские электроны) справедливы разложения

$$\phi(x) \to \frac{1}{15\pi^2}\left(x^5 - \frac{5}{14}x^7 + \frac{5}{24}x^9 \cdots\right),$$

$$\chi(x) \to \frac{1}{3\pi^2}\left(x^3 + \frac{3}{10}x^5 - \frac{3}{56}x^7 \cdots\right), \tag{2.3.19}$$

в то время как для $x \gg 1$ (релятивистские электроны)

$$\phi(x) \to \frac{1}{12\pi^2}\left(x^4 - x^2 + \frac{3}{2}\ln 2x \cdots\right),$$

$$\chi(x) \to \frac{1}{4\pi^2}\left(x^4 + x^2 - \frac{1}{2}\ln 2x \cdots\right). \tag{2.3.20}$$

Уравнение состояния можно записать в форме политропы

$$P = K\rho_0^\Gamma, \tag{2.3.21}$$

где K и Γ являются постоянными в двух предельных случаях:

1. Нерелятивистские электроны, $\rho_0 \ll 10^6$ г/см^3, $x \ll 1$, $\phi(x) \to x^5/15\pi^2$,

$$\Gamma = \frac{5}{3}, \qquad K = \frac{3^{2/3}\pi^{4/3}}{5}\,\frac{\hbar^2}{m_e m_u^{5/3}\mu_e^{5/3}} = \frac{1{,}0036 \times 10^{13}}{\mu_e^{5/3}}\ \text{СГС}. \tag{2.3.22}$$

2. Ультрарелятивистские электроны, $\rho \gg 10^6$ г/см^3, $x \gg 1$, $\phi(x) \to x^4/12\pi^2$,

$$\Gamma = \frac{4}{3}, \qquad K = \frac{3^{1/3}\pi^{2/3}}{4}\,\frac{\hbar c}{m_u^{4/3}\mu_e^{4/3}} = \frac{1{,}2435 \times 10^{15}}{\mu_e^{4/3}}\ \text{СГС}. \tag{2.3.23}$$

Вышеприведенные результаты можно легко перенести на случай частиц с массой m_i и статистическим весом g_i, получив в результате уравнение состояния идеальных фермионов произвольного сорта i. Например, для чистых нейтронов уравнения (2.3.7), (2.3.14) и (2.3.21)—(2.3.23) превращаются соответственно в

$$\varepsilon_n = \frac{m_n c^2}{\lambda_n^3}\chi(x_n) = 1{,}6250 \times 10^{38}\chi(x_n) \text{ эрг/см}^3, \quad \left(x_n = \frac{p_F}{m_n c}\right) \tag{2.3.24}$$

$$\rho_0 = m_n n_n = \frac{m_n}{\lambda_n^3}\frac{1}{3\pi^2}x_n^3 = 6{,}1067 \times 10^{15} x_n^3 \text{ г/см}^3, \tag{2.3.25}$$

$$P = K\rho_0^\Gamma, \tag{2.3.26}$$

где два предельных режима, указанные выше, суть

1. Нерелятивистские нейтроны, $\rho_0 \ll 6 \cdot 10^{15}$ г/см^3,

$$\Gamma = \frac{5}{3}, \qquad K = \frac{3^{2/3}\pi^{4/3}}{5}\frac{\hbar^2}{m_n^{8/3}} = 5{,}3802 \times 10^9 \text{ СГС}. \tag{2.3.27}$$

2. Ультрарелятивистские нейтроны, $\rho_0 \gg 5 \cdot 10^{15}$ г/см^3,

$$\Gamma = \frac{4}{3}, \qquad K = \frac{3^{1/3}\pi^{2/3}}{4}\frac{\hbar c}{m_n^{4/3}} = 1{,}2293 \times 10^{15} \text{ СГС}. \tag{2.3.28}$$

В этом случае плотность массы $\rho = \varepsilon_n/c^2$ целиком обусловлена нейтронами и сильно превосходит ρ_0, если нейтроны являются ультрарелятивистскими ($\rho_0 \gg 6 \cdot 10^{15}$ г/см^3).

Упражнение 2.3. В равновесии можно вычислить давление по известной плотности энергии с помощью соотношения (2.1.7). Предполагая, что имеются только электроны (т.е. $\varepsilon \to \varepsilon_e$, $n \to n_e$), покажите, что равенство (2.3.5) может быть выведено из равенств (2.3.4) и (2.3.7).

Упражнение 2.4. Покажите, что

$$\frac{\varepsilon_e + P_e}{n_e} = E_F, \tag{2.3.29}$$

и сравните с равенством (2.1.21).

Упражнение 2.5. Рассмотрите полностью ионизированное вещество, состоящее из водорода, гелия и более тяжелых атомных ядер, $i > 2$. Пусть X и Y обозначают долю по *массе* соответственно водорода и гелия. Покажите, что

$$\mu_e \simeq \frac{2}{1 + X}. \tag{2.3.30}$$

Подставьте приближенно $m_i = A_i m_u$ для всех i и возьмите $Z_i/A_i \approx 1/2$ при $i \geqslant 2$.

Упражнение 2.6. Покажите, что средняя кинетическая энергия электронов в вырожденном газе равна 3/5 E_F' в нерелятивистском пределе и 3/4 E_F в релятивистском пределе. Здесь $E_F' = E_F - m_e c^2 \simeq p_F^2/2m_e$.

Упражнение 2.7.

а) Покажите с помощью равенства (2.2.7), что для нерелятивистского газа Максвелла—Больцмана

$$n = g\left(\frac{mkT}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2} \exp\left(\frac{\mu - mc^2}{kT}\right) \tag{2.3.31}$$

$$P = nkT, \tag{2.3.32}$$

$$\varepsilon = nmc^2 + \tfrac{3}{2}nkT. \tag{2.3.33}$$

б) Используя равенство (2.1.21) (для одного сорта частиц), покажите, что

$$\frac{s}{k} = \frac{5}{2} + \ln\left[\frac{g}{n}\left(\frac{mkT}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2}\right]. \tag{2.3.34}$$

Упражнение 2.8. Предположим, что частицы газа в упр. 2.7 имеют внутренние степени свободы (например, отвечающие возбуждению атома или ядра). Тогда для их энергии можно написать $E = E_{\text{c.m.}} + E_j$, где энергия центра масс $E_{\text{c.m.}}$ определяется равенством (2.2.4), а относительно E_j предположим, что она не зависит от P и равна нулю в основном состоянии. Покажите, что равенство (2.3.31) следует изменить, сделав подстановку

$$g \to \sum_j g_j e^{-E_j/kT}, \tag{2.3.35}$$

где g_j — степень вырождения j-го возбужденного состояния. Как изменятся выражения для P, ε и s?

Упражнение 2.9. Покажите с помощью интегрирования по частям равенства (2.2.2), что выражение $P = nkT$ справедливо для газа Максвелла—Больцмана в общем случае независимо от того, является ли он релятивистским или нет.

2.4. ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКИЕ ПОПРАВКИ К УРАВНЕНИЮ СОСТОЯНИЯ

Рассмотренное в предыдущем разделе уравнение состояния идеального вырожденного ферми-газа было использовано Чандрасекаром в его пионерских работах [111, 112] по изучению равновесия белых карликов (см. гл. 3). На практике к этому уравнению состояния имеются две существенные поправки. Одна из них, *обратный β-распад*, обсуждается в разд. 2.5—2.7. Предметом этого раздела являются поправки, связанные с *электростатическим взаимодействием* между электронами и ионами.

Основная часть электростатических поправок возникает из-за того, что положительные заряды не распределены однородно по газу, а сосредоточены в отдельных ядрах с зарядом Z. Это приводит к уменьшению энергии и давления окружающих их электронов, так как расстояние между отталкивающимися друг от друга электронами в среднем больше расстояния между ядрами и электронами, и потому отталкивание оказывается слабее, чем притяжение.