

## Упражнение 2.7.

а) Покажите с помощью равенства (2.2.7), что для нерелятивистского газа Максвелла—Больцмана

$$n = g \left( \frac{mkT}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} \exp\left( \frac{\mu - mc^2}{kT} \right) \quad (2.3.31)$$

$$P = nkT, \quad (2.3.32)$$

$$\epsilon = nmc^2 + \frac{3}{2}nkT. \quad (2.3.33)$$

б) Используя равенство (2.1.21) (для одного сорта частиц), покажите, что

$$\frac{s}{k} = \frac{5}{2} + \ln \left[ \frac{g}{n} \left( \frac{mkT}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} \right]. \quad (2.3.34)$$

Упражнение 2.8. Предположим, что частицы газа в упр. 2.7 имеют внутренние степени свободы (например, отвечающие возбуждению атома или ядра). Тогда для их энергии можно написать  $E = E_{\text{с.м.}} + E_j$ , где энергия центра масс  $E_{\text{с.м.}}$  определяется равенством (2.2.4), а относительно  $E_j$  предположим, что она не зависит от  $P$  и равна нулю в основном состоянии. Покажите, что равенство (2.3.31) следует изменить, сделав подстановку

$$g \rightarrow \sum_j g_j e^{-E_j/kT}, \quad (2.3.35)$$

где  $g_j$  — степень вырождения  $j$ -го возбужденного состояния. Как изменятся выражения для  $P$ ,  $\epsilon$  и  $s$ ?

Упражнение 2.9. Покажите с помощью интегрирования по частям равенства (2.2.2), что выражение  $P = nkT$  справедливо для газа Максвелла—Больцмана в общем случае независимо от того, является ли он релятивистским или нет.

## 2.4. ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКИЕ ПОПРАВКИ К УРАВНЕНИЮ СОСТОЯНИЯ

Рассмотренное в предыдущем разделе уравнение состояния идеального вырожденного ферми-газа было использовано Чандрасекаром в его пионерских работах [111, 112] по изучению равновесия белых карликов (см. гл. 3). На практике к этому уравнению состояния имеются две существенные поправки. Одна из них, *обратный  $\beta$ -распад*, обсуждается в разд. 2.5—2.7. Предметом этого раздела являются поправки, связанные с *электростатическим взаимодействием* между электронами и ионами.

Основная часть электростатических поправок возникает из-за того, что положительные заряды не распределены однородно по газу, а сосредоточены в отдельных ядрах с зарядом  $Z$ . Это приводит к уменьшению энергии и давления окружающих их электронов, так как расстояния между отталкивающимися друг от друга электронами в среднем больше расстояния между ядрами и электронами, и потому отталкивание оказывается слабее, чем притяжение.

В невырожденном газе роль кулоновских эффектов возрастает с увеличением плотности. Действительно, отношение кулоновской энергии к тепловой приближенно равно

$$\frac{E_c}{kT} = \frac{Ze^2/\langle r \rangle}{kT} \approx \frac{Ze^2 n_e^{1/3}}{kT}. \quad (2.4.1)$$

Это отношение растет с ростом  $n_e$ . Здесь  $\langle r \rangle \sim n_e^{-1/3}$  — характерное расстояние между электронами и ионами. Напротив, для вырожденного газа имеем

$$\frac{E_c}{E'_F} = \frac{Ze^2/\langle r \rangle}{p_F^2/2m_e}. \quad (2.4.2)$$

Используя выражение (2.3.2) для  $p_F$ , преобразуем это равенство следующим образом:

$$\frac{E_c}{E'_F} = 2 \left( \frac{1}{3\pi^2} \right)^{2/3} \frac{Z}{a_0} \frac{1}{n_e^{1/3}} = \left( \frac{n_e}{Z^3 \times 6 \times 10^{22} \text{ см}^{-3}} \right)^{-1/3} \quad (2.4.3)$$

где  $a_0 = \hbar^2/m_e e^2$  — боровский радиус. Таким образом,  $E_c \ll E'_F$  для большинства рассматриваемых в астрофизике вырожденных газов.

Можно вывести приближенное выражение для поправки к уравнению состояния идеального вырожденного газа, используя условие [подразумеваемое в уравнении (2.4.3)], что концентрация  $n_e$  в первом приближении однородна.

При  $T \rightarrow 0$  ионы образуют решетку, максимизирующую расстояние между ионами. Рассмотрим «сферическую» ячейку этой решетки с объемом  $4\pi r_0^3/3 = 1/n_N$ , где  $n_N$  — концентрация ядер. В этом приближении, называемом приближением Вигнера — Зейтца<sup>1)</sup>, газ можно представить себе разделенным на нейтральные сферы радиусом  $r_0$  вокруг каждого ядра, причем каждая сфера содержит  $Z$  электронов, ближайших к ядру.

Полная электростатическая энергия любой такой сферы равна сумме потенциальных энергий электрон-электронного ( $e - e$ ) и электрон-ионного ( $e - i$ ) взаимодействий. Чтобы собрать однородную сферу из  $Z$  электронов, необходимо затратить энергию

$$E_{e-e} = \int_0^{r_0} \frac{q dq}{r}, \quad (2.4.4)$$

<sup>1)</sup> Приближение Вигнера — Зейтца гораздо лучше применимо для белых карликов, чем для обычных (земных) твердых тел, для которых концентрация  $n_e$  заметно более неоднородна.

где

$$q = -Ze \frac{r^3}{r_0^3} \quad (2.4.5)$$

представляет собой заряд внутри сферы радиусом  $r$ . Выполнив интегрирование, получим

$$E_{e-e} = \frac{3}{5} \frac{Z^2 e^2}{r_0}. \quad (2.4.6)$$

Наличие электронной сферы вокруг центрального ядра с зарядом  $Ze$  приводит к уменьшению энергии на

$$E_{e-i} = Ze \int_0^{r_0} \frac{dq}{r} = -\frac{3}{2} \frac{Z^2 e^2}{r_0}. \quad (2.4.7)$$

Таким образом, полная кулоновская энергия такой ячейки равна

$$E_c = E_{e-e} + E_{e-i} = -\frac{9}{10} \frac{Z^2 e^2}{r_0}. \quad (2.4.8)$$

В силу того что ячейки нейтральны, можно пренебречь взаимодействием между электронами и ядрами, находящимися в различных ячейках.

Электростатическая энергия, приходящаяся на один электрон, равна

$$\frac{E_c}{Z} = -\frac{9}{10} \left( \frac{4\pi}{3} \right)^{1/3} Z^{2/3} e^2 n_e^{1/3}, \quad (2.4.9)$$

здесь было использовано выражение

$$n_e = \frac{Z}{4\pi r_0^3/3}. \quad (2.4.10)$$

Численный коэффициент в равенстве (2.4.9) равен 1,45079, что очень близко к точному значению 1,44423 для объемноцентрированной кубической решетки [140]. Соответствующее давление отрицательно и определяется уравнением (2.1.7):

$$P_c = n_e^2 \frac{d(E_c/Z)}{dn_e} = -\frac{3}{10} \left( \frac{4\pi}{3} \right)^{1/3} Z^{2/3} e^2 n_e^{4/3}. \quad (2.4.11)$$

Сначала рассмотрим это выражение в ультрарелятивистском пределе. В этом случае результат Чандрасекара для идеального газа имеет вид

$$P_0 \rightarrow \hbar c (3\pi^2)^{1/3} \frac{n_e^{4/3}}{4} \quad (2.4.12)$$

[ср. с равенствами (2.3.5), (2.3.20) и (2.3.4)], и потому

$$\frac{P}{P_0} = \frac{P_0 + P_c}{P_0} = 1 - \frac{2^{5/3}}{5} \left(\frac{3}{\pi}\right)^{1/3} \alpha Z^{2/3}, \quad (2.4.13)$$

где  $\alpha = e^2/\hbar c = 1/137$  — постоянная тонкой структуры. Следующий член в этом разложении по степеням  $\alpha Z^{2/3}$  возникает из-за неоднородности распределения электронной концентрации (поправки Томаса—Ферми; ср. с излагаемым ниже и работой Солпитера [496]).

Хотя вышеприведенные кулоновские поправки относительно малы, они все же существенны для белых карликов с высокой плотностью вещества и нейтронных звезд малой плотности.

В нерелятивистском пределе

$$P_0 \rightarrow \hbar^2 (3\pi^2)^{2/3} \frac{n_e^{5/3}}{5m_e} \quad (2.4.14)$$

[ср. с равенствами (2.3.5), (2.3.19) и (2.3.4)], и потому

$$\frac{P}{P_0} = 1 - \frac{Z^{2/3}}{2^{1/3} \pi a_0 n_e^{1/3}}. \quad (2.4.15)$$

Отсюда следует, что  $P = 0$ , когда

$$n_e = \frac{Z^2}{2\pi^3 a_0^3}. \quad (2.4.16)$$

Это, согласно равенству (2.3.11) при  $A \sim 2Z$ , отвечает плотности

$$\rho_0 \approx 0,4 Z^2 \text{ г/см}^3. \quad (2.4.17)$$

Равенство (2.4.17) дает для железа  $\rho_0 \approx 250 \text{ г/см}^3$  вместо лабораторного значения  $7,86 \text{ г/см}^3$ . Причина этого расхождения состоит в том, что при малой плотности приближение однородного газа уже неприменимо.

Точное уравнение состояния, справедливое при лабораторных плотностях, получить весьма трудно, так как эффекты, связанные с существованием электронных оболочек, маскируют более простые статистические эффекты. Однако статистический подход к уравнению состояния хорошо работает уже при плотностях, в несколько раз превышающих лабораторные, и оказывается вполне адекватным при рассмотрении белых карликов с малыми массами (и даже при рассмотрении глобальной структуры больших планет).

Простейшим статистическим подходом к исследованию атомной структуры является *метод Томаса—Ферми*. Предполагается, что внутри каждой ячейки Вигнера—Зейтца электроны движутся в поле медленно меняющегося сферически-симметричного потенциала  $V(r)$ . Так как в любой

точке этот потенциал является примерно постоянным, то для электронов можно использовать статистику Ферми—Дирака свободных частиц. Это означает, что энергия взаимодействия между электронами принимается малой по сравнению с кинетической или потенциальной энергией отдельного электрона. В силу этого при любом  $r$  все состояния вплоть до  $E = E_F$  оказываются занятыми. Энергия  $E_F$  не зависит от  $r$ , в противном случае электроны перемещались бы в области с меньшим значением  $E_F$ . Таким образом,

$$E_F = -eV(r) + \frac{p_F^2(r)}{2m_e} = \text{const}, \quad (2.4.18)$$

где  $p_F$  — максимальное значение импульса электронов в точке  $r$ . Выбирая подходящим образом произвольную постоянную в  $V(r)$ , можно придать  $E_F$  любое удобное значение. Однако здесь мы не будем использовать эту возможность.

---

*Упражнение 2.10.* Покажите, что утверждение о постоянстве  $E$  можно получить из условия, что электронное облако удерживается в гидростатическом равновесии за счет давления идеального ферми-газа.

---

Аналогично равенству (2.3.2) получим

$$n_e = \frac{8\pi}{3h^3} p_F^3 = \frac{8\pi}{3h^3} \{2m_e [E_F + eV(r)]\}^{3/2}. \quad (2.4.19)$$

Потенциал  $V(r)$  определяется уравнением Пуассона:

$$\nabla^2 V = 4\pi e n_e + \text{вклад ядра}. \quad (2.4.20)$$

Вклад ядра представляет собой  $\delta$ -функцию в начале координат, так что при  $r > 0$  его можно опустить, налагая граничные условия

$$\lim_{r \rightarrow 0} rV(r) = Ze. \quad (2.4.21)$$

На границе ячейки  $r_0$  электрическое поле должно исчезать (ячейка электро-нейтральна):

$$\left. \frac{dV}{dr} \right|_{r_0} = 0. \quad (2.4.22)$$

Из соотношений (2.4.19) и (2.4.20) следует уравнение

$$\frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} (rV) = \frac{32\pi^2 e}{3h^3} [2m_e (E_F + eV)]^{3/2}, \quad (2.4.23)$$

решение которого должно удовлетворять граничным условиям (2.4.21) и (2.4.22).

Удобно перейти к безразмерным величинам, положив

$$r = \mu x, \quad (2.4.24)$$

$$E_F + eV(r) = \frac{Ze^2\phi(x)}{r}, \quad (2.4.25)$$

где

$$\mu = \left( \frac{9\pi^2}{128Z} \right)^{1/3} a_0. \quad (2.4.26)$$

После некоторого упрощения уравнение (2.4.23) превращается в уравнение Томаса—Ферми

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = \frac{\phi^{3/2}}{x^{1/2}}, \quad (2.4.27)$$

с граничными условиями

$$\phi(0) = 1, \quad (2.4.28)$$

$$\phi'(x_0) = \frac{\phi(x_0)}{x_0}. \quad (2.4.29)$$

*Упражнение 2.11.* Убедитесь, что уравнение (2.4.29) также можно получить, если потребовать выполнения условия электронейтральности в форме

$$Z = \int_0^{r_0} 4\pi r^2 n_e dr. \quad (2.4.30)$$

Уравнение (2.4.27) нелинейно, и потому его приходится решать численно; такое численное интегрирование было проведено в работе [196]. Если в качестве исходного взять значение  $\phi(0) = 1$  в начале координат, то существует выделенное значение [316]  $\phi'(0) = (-1,5880710)$ , для которого решение асимптотически прижимается к оси  $x$  при больших  $x$ , а соотношение (2.4.29) удовлетворяется при  $\phi'(x_0) \rightarrow 0$ ,  $\phi(x_0) \rightarrow \infty$ , когда  $x_0 \rightarrow \infty$  (рис. 2.1). Как мы увидим ниже, это случай нулевого давления, соответствующего нулевой плотности и бесконечному радиусу ( $x_0 \rightarrow \infty$ ). Указанный недостаток модели Томаса—Ферми, а именно, тот результат, что свободные атомы имеют бесконечный радиус, устраняется, если учесть обменные эффекты (модель Томаса—Ферми—Дирака).

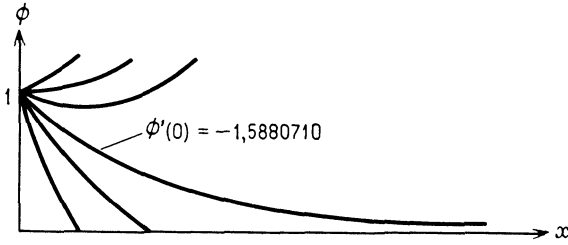


Рис. 2.1. Поведение решений уравнения Томаса — Ферми (2.4.27).

При  $\phi'(0) > -1,5880710$   $\phi(x)$  нигде не обращается в нуль и стремится к бесконечности при  $x \rightarrow \infty$ . Условие (2.4.29) удовлетворяется при некотором конечном значении  $x_0$ , которое определяет радиус ячейки. Этот случай соответствует нейтральным атомам, подвергающимся внешнему давлению. Мы не будем здесь рассматривать случай  $\phi'(0) < -1,5880710$ , соответствующий свободным положительным ионам, для которого  $\phi(x) = 0$  при конечном  $x_0$ .

Теперь вычислим давление на границе ячейки, пользуясь формулами, полученными для случая свободных частиц:

$$P = \frac{2}{h^3} \frac{1}{3} \int_0^{p_F} \frac{p^2}{m_e} 4\pi p^2 dp = \frac{8\pi}{15h^3 m_e} p_F^5(r_0). \quad (2.4.31)$$

Заметим, что поскольку  $dV/dr = 0$  на границе, то соседние ячейки друг на друга не действуют. Используя равенства (2.4.19) и (2.4.24)—(2.4.26), можно привести выражение (2.4.31) к виду

$$P = \frac{1}{10\pi} \frac{Z^2 e^2}{\mu^4} \left[ \frac{\phi(x_0)}{x_0} \right]^{5/2}. \quad (2.4.32)$$

Плотность определяется просто полной массой внутри ячейки:

$$\rho_0 = \frac{Am_B}{4\pi\mu^3 x_0^3/3}. \quad (2.4.33)$$

Соотношения (2.4.32) и (2.4.33) параметрически определяют уравнение состояния  $P = P(\rho_0)$  (через параметр  $x_0$ ). Хотя локально давление всюду внутри ячейки задается формулой для идеального ферми-газа нерелятивистских электронов, отклонения  $n_e(r)$  от однородности приводят к отклонению от идеального случая для «усредненного по ячейке» уравнения состояния  $P(\rho_0)$ .

При малой плотности  $x_0 \rightarrow \infty$ . Асимптотика решения уравнения (2.4.27) в этом случае имеет вид

$$\phi(x) \sim \frac{144}{x^3}, \quad x \rightarrow \infty. \quad (2.4.34)$$

*Упражнение 2.12.* Покажите, что выражение (2.4.34) удовлетворяет уравнению (2.4.27), однако нарушает условие (2.4.28).

Таким образом,

$$P \sim x_0^{-10} \sim \rho_0^{10/3}. \quad (2.4.35)$$

Это соотношение демонстрирует характерное увеличение «жесткости»<sup>1)</sup> уравнения состояния с показателем адиабаты  $\sim 3,3$  при уменьшении плотности<sup>2)</sup>. Следствия этого результата для белых карликов малой массы обсуждаются в гл. 3.

В пределе высоких плотностей результат (2.4.32), полученный в модели Томаса—Ферми, как и следовало ожидать, сводится к равенству (2.4.15) (ср. с упр. 2.18).

Более полное исследование поправок к уравнению состояния в обсуждаемом здесь режиме было проведено в работах [496, 500]. В большинстве приложений результаты работы [196] для модели Томаса—Ферми—Дирака являются адекватными при малых плотностях вплоть до значений  $10^4$  г/см<sup>3</sup>. При больших плотностях обычно используется результат Чандрасекара для идеального газа с кулоновскими поправками (2.4.11).

*Упражнение 2.13.*

а) Покажите, что кинетическая энергия электронов в модели Томаса-Ферми равна

$$\begin{aligned} E_{\text{К.Е.}} &= \int_0^{r_0} 4\pi r^2 dr \int_0^{p_F(r)} \frac{p^2}{2m} \frac{2}{h^3} 4\pi p^2 dp \\ &= \frac{3}{5} \frac{Z^2 e^2}{\mu} \int_0^{x_0} \phi^{5/2} x^{-1/2} dx. \end{aligned} \quad (2.4.36)$$

б) Покажите, что потенциальная энергия электронов в поле ядра равна

$$E_{e-n} = -Ze^2 \int_0^{r_0} 4\pi r^2 dr \frac{n_e}{r} = -\frac{Z^2 e^2}{\mu} \int_0^{x_0} \phi^{3/2} x^{-1/2} dx. \quad (2.4.37)$$

<sup>1)</sup> «Жесткость» (и «мягкость») — качественная характеристика уравнения состояния. Для заданной плотности более жесткому уравнению состояния соответствует большее давление. — *Прим. перев.*

<sup>2)</sup> Зельдович и Новиков [636] привели простой, но не вполне строгий вывод значения показателя степени  $10/3$  в соотношении (2.4.35).



в) Покажите, что потенциальная энергия взаимодействия электронов в сферической ячейке равна

$$E_{e-e} = \frac{1}{2} e^2 \int_{\mathcal{V}} d^3r n_e(\mathbf{r}) \int_{\mathcal{V}} d^3r' n_e(\mathbf{r}') |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-1} \quad (2.4.38)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{Z^2 e^2}{\mu} \int_0^{x_0} dx \phi^{3/2}(x) x^{1/2} \times \left[ \frac{1}{x} \int_0^x dx' \phi^{3/2}(x') (x')^{1/2} + \int_x^{x_0} dx' \phi^{3/2}(x') (x')^{-1/2} \right]. \quad (2.4.39)$$

*Упражнение 2.14.* Выведите уравнение Томаса—Ферми (2.4.27), минимизируя полную энергию  $E$  при ограничении (2.4.30). Величину  $\phi$  следует варьировать при фиксированной граничной точке  $x_0$ .

*Указания.* 1) Это ограничение соблюдается, если варьировать функцию

$$E + \lambda \int_0^{x_0} \phi^{3/2} x^{1/2} dx,$$

где  $\lambda = \text{const}$  — множитель Лагранжа.

2) Из-за симметрии выражения (2.4.38) вариация  $E_{e-e}$  равна удвоенному значению, полученному при вариации по  $\phi$  первого подынтегрального выражения в равенстве (2.4.39).

*Упражнение 2.15.*

а) Покажите, что

$$\frac{dE}{dx_0} = - \frac{2}{5} \frac{\phi^{5/2}(x_0)}{x_0^{1/2}} \frac{Z^2 e^2}{\mu}. \quad (2.4.40)$$

Заметим, что из-за граничного условия (2.4.29) функция  $\phi(x)$  неявно зависит от  $x_0$ , и, следовательно, ее следует дифференцировать по  $x_0$  под знаком интеграла. Полезное соотношение можно получить с помощью дифференцирования условия (2.4.30) по  $x_0$ .

б) Выведите равенство (2.4.32), повторно исходя из первого закона термодинамики.

*Упражнение 2.16.*

а) Исходя из равенства (2.4.36), покажите, что

$$E_{\text{к.э.}} = \frac{3}{7} \frac{Z^2 e^2}{\mu} \left[ \frac{4}{3} x_0^{1/2} \phi^{5/2}(x_0) - \phi'(0) \right]. \quad (2.4.41)$$

Указание<sup>1)</sup>. Интеграл  $I = \int_0^{x_0} \phi^{5/2} x^{-1/2} dx$  можно оценить, записав  $\phi^{5/2} = \phi^{3/2} \phi$ ,

подставив для  $\phi^{3/2}$  выражение из уравнения (2.4.27), дважды проинтегрировав по частям, повторив подстановку для  $\phi^{3/2}$  и снова проинтегрировав по частям.

б) Оцените внутренний интеграл в выражении (2.4.39) для  $E_{e-e}$ , подставляя  $\phi^{3/2}$  из уравнения (2.4.27). На основании этого покажите, что

$$E_{P.E.} \equiv E_{e-n} + E_{e-e} = -\frac{6}{7} \frac{Z^2 e^2}{\mu} \left[ \frac{1}{3} x_0^{1/2} \phi(x_0)^{5/2} - \phi'(0) \right]. \quad (2.4.42)$$

Упражнение 2.17. Проверьте, что в приближении Томаса—Ферми справедливо вириальное соотношение:

$$E_{K.E.} + \frac{1}{2} E_{P.E.} = \frac{3}{2} P \mathcal{V},$$

где  $\mathcal{V} = \frac{4}{3} \pi r_0^3$ .

Упражнение 2.18 (основанное на работе [500]).

Решите уравнение Томаса—Ферми в пределе высокой плотности ( $x_0 \rightarrow 0$ ) следующим образом. Положите  $y = x/x_0$  и

$$\phi(y) = \frac{1}{x_0} f_0(y) + f_1(y) + x_0 f_2(y) + \dots$$

Покажите, что граничному условию (2.4.29) можно удовлетворить при

$$f_0'(1) = f_0(1), \quad f_1'(1) = f_1(1), \quad \text{и т.д.},$$

а граничному условию (2.4.28) — при

$$f_1(0) = 1, \quad f_2(0) = f_3(0) = \dots = 0.$$

Покажите, что таким образом можно воспроизвести полученный ранее результат (2.4.15), т.е.

$$P = P_0 + P_c.$$

(Почему для того, чтобы найти  $P(\rho_0)$  при высокой плотности, нельзя просто положить  $x = x_0 = 0$  и воспользоваться выражениями (2.4.32) и (2.4.33), подставив в первое из них равенство (2.4.28)?)

---

<sup>1)</sup> Описанная здесь процедура впервые приведена Милном [409], которому было известно аналогичное вычисление Эмденом [183] гравитационной потенциальной энергии политропы; см. гл. 3.