## 2.5. ОБРАТНЫЙ $\beta$-РАСПАД: ХОЛОДНЫЙ ИДЕАЛЬНЫЙ $n$—$p$—$e$-ГАЗ

При высоких плотностях наиболее существенная поправка к уравнению состояния обусловлена обратным $\beta$-распадом[1]:

$$e^- + p \to n + \nu. \tag{2.5.1}$$

Обычно протоны и нейтроны связаны в ядрах. Однако в этом разделе мы обсудим эффекты обратного $\beta$-распада, рассматривая случай газа *свободных* электронов, протонов и нейтронов. При этом будем полагать, что нейтрино, образованные в реакции (2.5.1), свободно покидают систему. В разд. 2.6 и 2.7 рассмотрен более интересный случай *связанных* нуклонов.

Реакция (2.5.1) может идти только в том случае, если энергия электрона достаточно высока, чтобы скомпенсировать разность масс протона и нейтрона; $(m_n - m_p) \cdot c^2 = 1{,}29$ МэВ. Этот процесс эффективно перерабатывает протоны в нейтроны, если не происходит $\beta$-распад:

$$n \to p + e + \bar{\nu}. \tag{2.5.2}$$

Реакция (2.5.2) запрещена, если плотность вещества настолько высока, что все уровни энергии электронов заняты, вплоть до того, который должен был бы занять испускаемый в этой реакции электрон. Таким образом, существует критическое значение плотности, ниже которой начинается реакция (2.5.2).

Можно рассчитать свойства такой смеси электронов, протонов и нейтронов, полагая, что они находятся в равновесии. В этом случае равенство (2.1.12) дает

$$\mu_e + \mu_p = \mu_n. \tag{2.5.3}$$

Химический потенциал нейтрино здесь положен равным нулю; иными словами, предполагается, что концентрация нейтрино равна нулю. Введем по аналогии с равенством (2.3.3) следующие величины:

$$x_e = \frac{p_{\mathrm{F}}^e}{m_e c}, \qquad x_n = \frac{p_{\mathrm{F}}^n}{m_n c}, \qquad x_p = \frac{p_{\mathrm{F}}^p}{m_p c}. \tag{2.5.4}$$

Тогда в силу того что $\mu_e = [(p_{\mathrm{F}}^e c)^2 + m_e^2 c^4]^{1/2}$ и т.д., уравнение (2.5.3) принимает вид

$$m_e\left(1 + x_e^2\right)^{1/2} + m_p\left(1 + x_p^2\right)^{1/2} = m_n\left(1 + x_n^2\right)^{1/2}. \tag{2.5.5}$$

---

[1] Там, где из контекста ясно, что речь идет только об электронных нейтрино, мы будем вместо $\nu_e$ использовать обозначение $\nu$.

Условие зарядовой нейтральности $n_e = n_p$ приводит к соотношению [ср. с равенством (2.3.4)]:

$$\frac{1}{3\pi^2\lambda_e^3}x_e^3 = \frac{1}{3\pi^2\lambda_p^3}x_p^3 \tag{2.5.6}$$

или, иначе,

$$m_e x_e = m_p x_p. \tag{2.5.7}$$

Теперь уравнение состояния можно записать параметрически, например через параметр $x_e$: при заданном $x_e$ уравнение (2.5.7) определяет $x_p$, а уравнение (2.5.5) — $x_n$. В результате получим

$$P = \frac{m_e c^2}{\lambda_e^3}\phi(x_e) + \frac{m_p c^2}{\lambda_p^3}\phi(x_p) + \frac{m_n c^2}{\lambda_n^3}\phi(x_n), \tag{2.5.8}$$

$$\varepsilon = \frac{m_e c^2}{\lambda_e^3}\chi(x_e) + \frac{m_p c^2}{\lambda_p^3}\chi(x_p) + \frac{m_n c^2}{\lambda_n^3}\chi(x_n), \tag{2.5.9}$$

$$n = \frac{1}{3\pi^2\lambda_p^3}x_p^3 + \frac{1}{3\pi^2\lambda_n^3}x_n^3. \tag{2.5.10}$$

---

*Упражнение 2.19.* Выведите соотношение (2.5.5), минимизируя $\varepsilon$ при фиксированном $n$ и используя условие электронейтральности.

---

Минимальную плотность, при которой появляются нейтроны, можно найти, положив $x_n = 0$ в равенстве (2.5.5). Поскольку оказывается, что при этой плотности протоны будут нерелятивистскими, то $x_p \ll 1$, и потому из (2.5.6) следует

$$m_e\left(1 + x_e^2\right)^{1/2} = Q, \tag{2.5.11}$$

где $Q = m_n - m_p$. Разрешая это уравнение относительно $x_e$, из выражений (2.5.6) и (2.5.10) получим

$$n = \frac{1}{3\pi^2\lambda_e^3}\left[\left(\frac{Q}{m_e}\right)^2 - 1\right]^{3/2} = 7{,}37 \times 10^{30}\ \text{см}^{-3}, \tag{2.5.12}$$

и, следовательно,

$$\rho_0 \approx n m_p \approx 1{,}2 \times 10^7\ \text{г/см}^3. \tag{2.5.13}$$

---

*Упражнение 2.20.* Удовлетворяется ли уравнение (2.5.5) при $\rho_0 < 1{,}2 \cdot 10^7$ г/см$^3$?

---

При плотности выше указанной равновесная смесь содержит все возрастающую долю нейтронов. Ее состав можно определить, подставив равенство (2.5.7) в соотношение (2.5.5):

$$\left(m_e^2 + m_p^2 x_p^2\right)^{1/2} + m_p\left(1 + x_p^2\right)^{1/2} = m_n\left(1 + x_n^2\right)^{1/2}. \qquad (2.5.14)$$

Дважды возводя равенство (2.5.14) в квадрат и упрощая, получим

$$4m_n^2 m_p^2 x_p^2\left(1 + x_n^2\right) = \left(Q^2 - m_e^2\right)\left[\left(m_n + m_p\right)^2 - m_e^2\right] + $$
$$+ 2m_n^2 x_n^2\left(m_n^2 - m_p^2 - m_e^2\right) + m_n^4 x_n^4. \qquad (2.5.15)$$

Таким образом,

$$\frac{n_p}{n_n} = \left(\frac{m_p x_p}{m_n x_n}\right)^3 =$$
$$= \frac{1}{8}\left\{\frac{1 + \dfrac{2\left(m_n^2 - m_p^2 - m_e^2\right)}{m_n^2 x_n^2} + \dfrac{\left(Q^2 - m_e^2\right)\left[\left(m_n + m_p\right)^2 - m_e^2\right]}{m_n^4 x_n^4}}{1 + \dfrac{1}{x_n^2}}\right\}^{3/2}. \qquad (2.5.16)$$

Теперь, поскольку и $Q$, и $m_e$ много меньше, чем $m_n$,

$$\frac{n_p}{n_n} \simeq \frac{1}{8}\left\{\frac{1 + 4Q/m_n x_n^2 + 4\left(Q^2 - m_e^2\right)/m_n^2 x_n^4}{1 + 1/x_n^2}\right\}^{3/2}. \qquad (2.5.17)$$

Следовательно, протон-нейтронное отношение сначала убывает с ростом $x_n$, т.е. с ростом плотности. Оно достигает своего минимального значения, равного

$$\left(\frac{n_p}{n_n}\right)_{\min} = \left[\frac{Q}{m_n} + \frac{\left(Q^2 - m_e^2\right)^{1/2}}{m_n}\right]^{3/2} = 0{,}0026 \qquad (2.5.18)$$

при

$$n_n = \frac{2^{3/2}}{3\pi^2 \lambda_n^3}\left(\frac{Q^2 - m_e^2}{m_e^2}\right)^{3/4}, \qquad \rho_0 \approx m_n n_n \approx 7{,}8 \times 10^{11} \text{ г/см}^3, \qquad (2.5.19)$$

а затем монотонно растет, стремясь к 1/8 при $x_n \to \infty$, или $\rho_n \to \infty$.

Заметим, что найденное здесь равновесное состояние является устойчивым, так как соответствует минимуму $\varepsilon$.

---

*Упражнение 2.21.* Проверьте равенства (2.5.18) и (2.5.19).

*Упражнение 2.22.* Покажите, что результат $n_e : n_p : n_n = 1 : 1 : 8$ в пределе очень большой плотности является тривиальным следствием электронейтральности, $\beta$-равновесия и ультрарелятивистского вырождения.

*Упражнение 2.23.* Вычислите максимальный импульс электрона, испускаемого в реакции (2.5.2). Покажите, что $p_F^e$ больше этой величины при всех плотностях, превышающих значение (2.5.12). Отсюда следует, что равновесное состояние является устойчивым.

---

Результаты этого раздела, строго говоря, неприменимы к случаю гравитационного коллапса с испусканием нейтрино, даже если коллапс происходит квазистатически и при нулевой температуре. В открытой системе термодинамическое равновесие не достигается и состав $n$—$p$—$e$-смеси приходится определять, решая соответствующие кинетические уравнения для разных реакций.

Приведенные выше уравнения точно описывают равновесную систему с фиксированными зарядом (нулевым), барионным числом и лептонным числом. При этом для лептонного числа выбрано минимально возможное значение, т.е. рассмотрен предел $n_\nu \to 0$ $(\mu_\nu \to 0)$ при сохранении условия детального равновесия.

## 2.6. БЕТА-РАВНОВЕСИЕ МЕЖДУ РЕЛЯТИВИСТСКИМИ ЭЛЕКТРОНАМИ И ЯДРАМИ. УРАВНЕНИЕ СОСТОЯНИЯ ГАРРИСОНА-УИЛЕРА

Перейдем теперь к количественному рассмотрению обратного бета-распада и попытаемся получить более точное уравнение состояния в диапазоне плотности $10^7 \leqslant \rho \leqslant 4 \cdot 10^{11}$ г/см$^3$. Мы хотим найти низшее энергетическое состояние системы $A \sim 10^{57}$ барионов (масса $\sim 1M_\odot$), состоящей из отдельных ядер, которые находятся в бета-равновесии с релятивистским электронным газом. Нужно будет определить: 1) какие ядра находятся в этой системе, т.е. какие значения $A$ и $Z$ минимизируют энергию; 2) соответствующее давление.

В этом разделе мы предположим, что по прошествии достаточного времени после ядерного горения образовавшееся холодное вещество достигает полного термодинамического равновесия. Тогда наинизшее по энергии состояние определяет как состав, так и уравнение состояния материи. Возможность того, что вырожденное вещество звезд-карликов в природе действительно достигает минимальной энергии, обсуждается в гл. 3.

Как хорошо известно, для системы барионов с $A \lesssim 90$ состояние с наинизшей энергией представляет собой *единственное* ядро; при этом наиболее сильно связанным ядром является $^{56}_{26}$Fe. При $A \gtrsim 90$ состоянию с наи-