

а затем монотонно растет, стремясь к  $\frac{1}{8}$  при  $x_n \rightarrow \infty$ , или  $\rho_0 \rightarrow \infty$ .

Заметим, что найденное здесь равновесное состояние является устойчивым, так как соответствует минимуму  $\varepsilon$ .

*Упражнение 2.21.* Проверьте равенства (2.5.18) и (2.5.19).

*Упражнение 2.22.* Покажите, что результат  $n_e : n_p : n_n = 1 : 1 : 8$  в пределе очень большой плотности является тривиальным следствием электронейтральности,  $\beta$ -равновесия и ультрарелятивистского вырождения.

*Упражнение 2.23.* Вычислите максимальный импульс электрона, испускаемого в реакции (2.5.2). Покажите, что  $p_F^e$  больше этой величины при всех плотностях, превышающих значение (2.5.12). Отсюда следует, что равновесное состояние является устойчивым.

Результаты этого раздела, строго говоря, неприменимы к случаю гравитационного коллапса с испусканием нейтрино, даже если коллапс происходит квазистатически и при нулевой температуре. В открытой системе термодинамическое равновесие не достигается и состав  $n-p-e$ -смеси приходится определять, решая соответствующие кинетические уравнения для разных реакций.

Приведенные выше уравнения точно описывают равновесную систему с фиксированными зарядом (нулевым), барионным числом и лептонным числом. При этом для лептонного числа выбрано минимально возможное значение, т.е. рассмотрен предел  $n_\nu \rightarrow 0$  ( $\mu_\nu \rightarrow 0$ ) при сохранении условия детального равновесия.

## 2.6. БЕТА-РАВНОВЕСИЕ МЕЖДУ РЕЛЯТИВИСТСКИМИ ЭЛЕКТРОНАМИ И ЯДРАМИ. УРАВНЕНИЕ СОСТОЯНИЯ ГАРРИСОНА-УИЛERA

Перейдем теперь к количественному рассмотрению обратного бета-распада и попытаемся получить более точное уравнение состояния в диапазоне плотности  $10^7 \leq \rho \leq 4 \cdot 10^{11}$  г/см<sup>3</sup>. Мы хотим найти низшее энергетическое состояние системы  $A \sim 10^{57}$  барионов (масса  $\sim 1M_\odot$ ), состоящей из отдельных ядер, которые находятся в бета-равновесии с релятивистским электронным газом. Нужно будет определить: 1) какие ядра находятся в этой системе, т.е. какие значения  $A$  и  $Z$  минимизируют энергию; 2) соответствующее давление.

В этом разделе мы предположим, что по прошествии достаточного времени после ядерного горения образовавшееся холодное вещество достигает полного термодинамического равновесия. Тогда наинизшее по энергии состояние определяет как состав, так и уравнение состояния материи. Возможность того, что вырожденное вещество звезд-карликов в природе действительно достигает минимальной энергии, обсуждается в гл. 3.

Как хорошо известно, для системы барионов с  $A \leq 90$  состояние с наинизшей энергией представляет собой *единственное* ядро; при этом наиболее сильно связанным ядром является  ${}_{26}^{56}\text{Fe}$ . При  $A \geq 90$  состоянию с наи-

низшей энергией соответствует система, состоящая из двух и более ядер; наиболее сильная связь имеет место для значений  $A$ , являющихся целыми кратными 56. Таким образом, по мере увеличения  $A$  появляется все больше оснований рассматривать состояние вещества с минимальной энергией как чистое  ${}^{56}_{26}\text{Fe}$ . Однако положение меняется, когда  $A$  начинает превосходить  $10^{57}$  и становятся существенными эффекты самогравитации. Для барионов в гидростатическом равновесии величина плотности превосходит  $\rho \sim \sim 10^7$  г/см<sup>3</sup>. Следовательно, электроны являются релятивистскими; они соединяются со связанными в ядрах протонами, образуя нейтроны (обратный  $\beta$ -распад), что постепенно изменяет равновесный ядерный состав от  ${}^{56}_{26}\text{Fe}$  в сторону вещества, все более богатого нейтронами.

Физическая картина в общем выглядит следующим образом. Если бы равновесная структура ядра определялась только ядерными силами, нуклоны собирались бы в ядра неограниченного размера. Однако силы кулоновского отталкивания при этом стали бы настолько значительными, что привели бы к делению таких больших ядер. При низких плотностях эти два противоположных эффекта взаимно уравниваются при  $A = 56$ . Однако, когда в игру входят релятивистские электроны, баланс смещается. Доля нейтронов по отношению к протонам в ядре увеличивается (из-за обратного  $\beta$ -распада), и кулоновские силы начинают играть менее заметную роль. Отсюда возникает тенденция к образованию больших ядер. Когда плотность возрастает до  $\sim 4 \cdot 10^{11}$  г/см<sup>3</sup>, отношение  $n/p$  достигает критической величины. Любое дальнейшее увеличение плотности ведет к образованию нейтронных капель, т.е. к появлению двухфазной системы, где сосуществуют электроны, ядра и свободные нейтроны, которые совместно определяют состояние с наиминимальной энергией. Повышение плотности сверх  $4 \cdot 10^{11}$  г/см<sup>3</sup> ведет к увеличению отношения нейтроны — протоны и появлению все большего количества свободных нейтронов. Наконец, когда плотность превышает примерно  $4 \cdot 10^{12}$  г/см<sup>3</sup>, нейтроны создают большее давление, чем электроны. Таким образом, нейтроны начинают играть главную роль, и среду можно рассматривать как одно громадное ядро с плотностью несколько ниже нормальной ядерной.

Количественное рассмотрение начнем, выписав выражение для плотности энергии смеси ядер, свободных электронов и свободных нейтронов в форме

$$\varepsilon = n_N M(A, Z) + \varepsilon'_e(n_e) + \varepsilon_n(n_n). \quad (2.6.1)$$

Здесь  $M(A, Z)$  — энергия ядра  $(A, Z)$ , включающая в себя массу покоя нуклонов. В ядерной физике принято также включать в  $M(A, Z)$  массу покоя электронов. Следовательно, из выражения (2.3.7) для  $\varepsilon_e$  нужно вычесть  $n_e m_e c^2$  и обозначить остаток, входящий в равенство (2.6.1), через  $\varepsilon'_e$ . Величина  $n_N$  — концентрация атомных ядер, а  $n_n$  — концентрация свободных нейтронов. Концентрации барионов и электронов определяются выражениями

$$n = n_N A + n_n, \quad n_e = n_N Z, \quad (2.6.2)$$

т.е.

$$1 = AY_N + Y_n, \quad Y_e = Y_N Z. \quad (2.6.3)$$

Таким образом, вместо того чтобы рассматривать  $\varepsilon$  при  $T = 0$  как функцию  $(n, Y_N, Y_e, Y_n)$ , равным образом в качестве независимых переменных можно выбрать  $(n, A, Z, Y_n)$ . Равновесные относительные концентрации и уравнение состояния определяются минимизированием  $\varepsilon$  по  $A, Z$  и  $Y_n$  при фиксированном  $n$ .

Заметим, что, хотя в этой главе мы номинально интересуемся лишь уравнением состояния до процесса образования нейтронных капель, в уравнении (2.6.1) следует предусмотреть наличие свободных нейтронов, чтобы можно было определить начало этого процесса. Оказывается, что уравнение состояния Гаррисона—Уилера можно легко продолжить за точку образования нейтронных капель, что и будет сделано в данном разделе.

Величина  $M(A, Z)$  для очень богатых нейтронами ядер, рождающихся при плотностях выше  $10^{10}$  г/см<sup>3</sup>, экспериментально не определена, и поэтому ее приходится выводить теоретически. По крайней мере вплоть до образования нейтронных капель это обычно делается с помощью *полуэмпирической массовой формулы*.

Весьма простой вариант уравнения состояния был получен Гаррисоном и Уилером в 1958 г.<sup>1)</sup> Они использовали полуэмпирическую массовую формулу Грина [236]:

$$\begin{aligned} M(Z, A) &= \left[ (A - Z)m_n c^2 + Z(m_p + m_e)c^2 - A\bar{E}_b \right] = \\ &= m_u c^2 \left[ b_1 A + b_2 A^{2/3} - b_3 Z + b_4 A \left( \frac{1}{2} - \frac{Z}{A} \right)^2 + \frac{b_5 Z^2}{A^{1/3}} \right], \end{aligned} \quad (2.6.4)$$

где  $\bar{E}_b$  — средняя энергия связи, приходящаяся на один барион<sup>2)</sup>.

$$b_1 = 0,991749, \quad b_3 = 0,000840, \quad b_5 = 0,000763,$$

$$b_2 = 0,01911, \quad b_4 = 0,10175. \quad (2.6.5)$$

Это выражение основано на капельной модели ядра, причем его члены интерпретируются следующим образом. Основной вклад в  $\bar{E}_b$  пропорционален объему ядра, как в случае капли жидкости. Отличие  $b_1$  от единицы

<sup>1)</sup> Гаррисон и Уилер [259]. См. также Гаррисон и др. [261], гл. 10, где приведено более подробное обсуждение и даны удобные приближенные выражения для уравнения состояния.

<sup>2)</sup> Мы умножили все величины  $b_1, \dots, b_5$ , использованные Грином, на 0,999682, чтобы перейти от нормировки на  $^{16}\text{O}$  к современной нормировке на  $^{12}\text{C}$ .

обусловлено главным образом энергией связи этого объема (радиусы ядер приближенно пропорциональны  $A^{1/3}$ ). Слагаемое, пропорциональное  $b_2$ , представляет собой поверхностную энергию, а  $b_4$  — симметричный член (ядра с равным числом протонов и нейтронов имеют меньшую энергию), в то время как  $b_5$  дает кулоновскую энергию. Величина  $b_3$  равна просто  $(m_n - m_p - m_e)/m_u$ . Оболочечными эффектами и эффектами спаривания мы пренебрегаем<sup>1)</sup>.

**Упражнение 2.24.** Предположим, что ядро состоит из смеси двух идеальных нерелятивистских ферми-газов; в одном находится  $Z$  протонов, а в другом  $N = A - Z$  нейтронов. Покажите, что энергия ядра (за вычетом энергии покоя) равна

$$E = \frac{3}{5} E'_F \left[ \left( \frac{2N}{A} \right)^{2/3} N + \left( \frac{2Z}{A} \right)^{2/3} Z \right].$$

Здесь  $E'_F$  — энергия Ферми за вычетом энергии покоя, определенная для  $A$  нуклонов, находящихся в объеме  $V$ , так что в каждом состоянии с данным импульсом находятся четыре нуклона. Найдите  $E'_F$  по известной концентрации ядер  $n = 1,72 \cdot 10^{38}$  частиц/см<sup>3</sup>. Рассматривая отклонения от случая  $N = Z$  (минимум  $E$ ), определите симметричный член и покажите, что примерно половина величины  $b_4$  может быть объяснена в этой простой модели, использующей принцип Паули.

**Упражнение 2.25.** В модели ферми-газа вычислите поверхностную энергию ядра следующим образом. Плотность состояний в фазовом пространстве без учета спиновых эффектов равна

$$\frac{d\mathcal{N}}{d^3x d^3p} = \frac{1}{h^3}, \quad E < E_F.$$

Отсюда число состояний с импульсами между  $p$  и  $p + dp$  в ячейке объемом  $V$  равно

$$d\mathcal{N} = \frac{V4\pi p^2 dp}{h^3}.$$

Это выражение можно также получить, решая уравнение Шредингера для свободной частицы внутри кубической ячейки. В этом решении, однако, не следует учитывать состояния, для которых компоненты  $p_x$ ,  $p_y$  или  $p_z$  равны нулю, так как они соответствуют нулевой волновой функции. Покажите, что такое уточнение приводит к выражению

$$d\mathcal{N} = \frac{V4\pi p^2}{h^3} \left( 1 - \frac{h}{4} \frac{S}{Vp} \right) dp,$$

<sup>1)</sup> Обсуждение этих эффектов можно найти в любом учебнике по ядерной физике.

где  $S$  — поверхность ячейки. Используя это выражение, получите среднюю энергию связи, приходящуюся на одну частицу в форме разложения

$$\frac{E}{A} = a_0 + a_1 \frac{S}{V} + \dots,$$

где  $a_0 = \frac{3}{2}E_F^i$ . Используя выражение  $r_N = r_0 A^{1/3}$  и  $n = A/V = \frac{3}{4}\pi r_0^3$  соответственно для радиуса ядра и концентрации частиц в ядре, найдите связь между  $a_1$  и  $b_2$  и покажите, что рассматриваемая модель близка к реальности.

*Упражнение 2.26.* Выведите приближенное выражение для кулоновского члена в равенстве (2.6.4), соответствующим образом интерпретируя равенство (2.4.6) и используя значение  $r_N = 1,5 \cdot 10^{-13} A^{1/3}$  см.

*Упражнение 2.27.* Предполагая равное количество нейтронов и протонов в ядре и используя выражение (2.6.4), изобразите график зависимости  $\bar{E}_b$  (МэВ) от  $A$  для стабильных ядер при  $A$  меньше 130. Найдите  $A_{\max}$ , т.е. ядро с максимальной энергией связи. Чему равно  $\bar{E}_b |_{\max}$ ? Для каких  $A > A_{\max}$  энергетически выгодно деление на два ядра?

Уравнение (2.6.1) теперь принимает вид

$$\varepsilon = n(1 - Y_n) \frac{M(A, Z)}{A} + \varepsilon'_e(n_e) + \varepsilon_n(n_n), \quad (2.6.6)$$

где

$$n_e = n(1 - Y_n) \frac{Z}{A},$$

$$n_n = nY_n. \quad (2.6.7)$$

Заметим, что

$$\frac{d\varepsilon'_e}{dn_e} = \frac{\varepsilon'_e + p_e}{n_e} = E_{F_e} - m_e c^2,$$

$$\frac{d\varepsilon_n}{dn_n} = \frac{\varepsilon_n + p_n}{n_n} = E_{F_n}. \quad (2.6.8)$$

[Сравните с выражениями (2.1.7) и (2.3.29).] Гаррисон и Уилер приближенно рассматривали  $Z$  и  $A$  как непрерывные переменные, учитывая полуэмпирическую массовую формулу. Таким образом, условие  $\partial\varepsilon/\partial Z = 0$  приводит к соотношению

$$\frac{\partial M}{\partial Z} = - (E_{F_e} - m_e c^2), \quad (2.6.9)$$

которое можно считать непрерывным пределом условия  $\beta$ -стабильности:  $M(Z - 1, A)$  находится в равновесии с  $M(Z, A)$ , причем свободный электрон находится на поверхности моря Ферми.

Аналогичным образом условие  $\partial\varepsilon/\partial A = 0$  приводит к равенству

$$A^2 \frac{\partial}{\partial A} \left( \frac{M}{A} \right) = Z(E_{F_e} - m_e c^2). \quad (2.6.10)$$

Это непрерывный предел условия равновесия ( $A - 1$ ) атомов типа  $(Z, A)$  с  $A$  атомами типа  $(Z, A - 1)$ . Дополнительно должны возникать  $Z$  свободных электронов с энергией на поверхности моря Ферми, когда ядерный заряд увеличивается от  $(A - 1)$  до  $AZ$ . Комбинируя уравнения (2.6.9) и (2.6.10), можно получить

$$Z \frac{\partial M}{\partial Z} + A \frac{\partial M}{\partial A} - M = 0. \quad (2.6.11)$$

Из условия  $\partial\varepsilon/\partial Y_n = 0$ , пользуясь уравнением (2.6.10), получим

$$\frac{\partial M}{\partial A} = E_{F_n}, \quad (2.6.12)$$

что представляет собой непрерывный вариант условия равновесия  $M(Z, A)$  с  $M(Z, A - 1)$  и свободным нейтроном.

Уравнение (2.6.9) дает

$$b_3 + b_4 \left( 1 - \frac{2Z}{A} \right) - 2b_5 \frac{Z}{A^{1/3}} = \left[ (1 + x_e^2)^{1/2} - 1 \right] \frac{m_e}{m_u}, \quad (2.6.13)$$

где параметр  $x_e$  определен равенством (2.5.4). Уравнение (2.6.11) приводит к условию

$$Z = \left( \frac{b_2}{2b_5} \right)^{1/2} A^{1/2} = 3,54A^{1/2}, \quad (2.6.14)$$

а из уравнения (2.6.12) вытекает

$$b_1 + \frac{2b_2 A^{-1/3}}{3} + b_4 \left( \frac{1}{4} - \frac{Z^2}{A^2} \right) - \frac{b_5 Z^2}{3A^{4/3}} = (1 + x_n^2)^{1/2} \frac{m_n}{m_u}, \quad (2.6.15)$$

где  $x_n$  также определен равенством (2.5.4). Заметим, что в рассматриваемых условиях высоких плотностей хотя  $Z$  и возрастает с ростом  $A$ , отношение  $Z/A$  падает, как  $A^{-1/2}$ .

Чтобы вывести уравнение состояния из полученных выше соотношений, выберем сначала  $A > 56$ . Тогда равенство (2.6.14) определит  $Z$ . Далее проверим, достигнута ли при этом точка образования нейтронных капель, т.е.

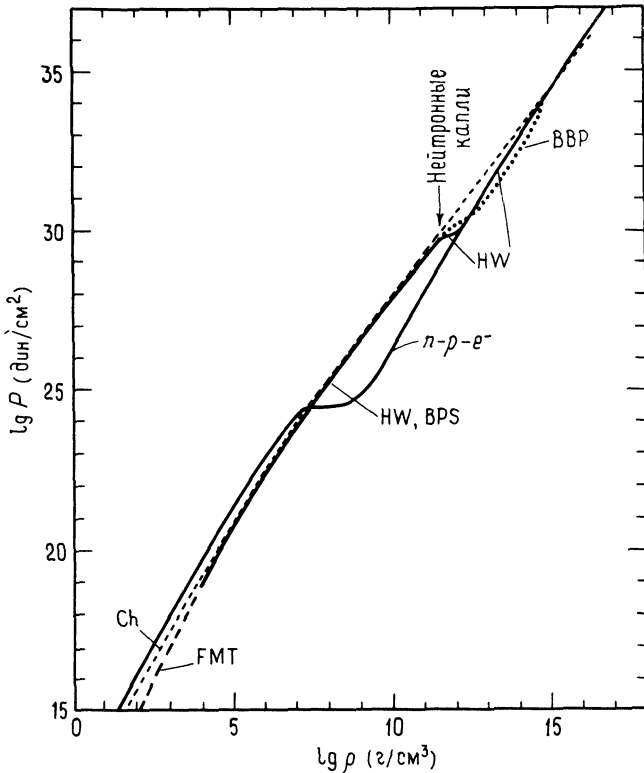


Рис. 2.2. Различные уравнения состояния ниже точки образования нейтронных капель. Буквенные индексы у различных кривых поясняются в табл. 2.2. Уравнение состояния Chandrasekara (Ch) приведено для  $\mu_e = 56/26$ . Уравнения состояния Гаррисона — Уилера (HW) и Бейма — Петика — Сазерленда (BPS) гладко сливаются с уравнением состояния Фейнмана — Метрополиса — Геллера (FMT) при  $\rho = 10^4$  г/см<sup>3</sup>. Заметим, что выше точки образования нейтронных капель ( $\rho_{\text{drip}} \approx 3,2 \cdot 10^{11}$  г/см<sup>3</sup> показана вертикальной стрелкой) уравнение состояния Гаррисона — Уилера гладко переходит в уравнение состояния идеального  $n-p-e^-$ -газа, а уравнение состояния BPS ( $\rho_{\text{drip}} \approx 4,3 \cdot 10^{11}$  г/см<sup>3</sup>) переходит в уравнение состояния Бейма — Бете — Петика (BBP) (см. гл. 8).

приводит ли уравнение (2.6.15) к положительным  $x_n$ . Если да, то вычислим  $\epsilon_n$ ,  $P_n$  и  $n_n$  из уравнений (2.3.4), (2.3.5) и (2.3.7), заменив в них  $m_e$  на  $m_n$ . В противном случае положим эти величины равными нулю. Уравнение (2.6.13) определяет  $x_e$  и, следовательно,  $\epsilon'_e$ ,  $P_e$  и  $n_e$ . Тогда

$$\rho = \frac{\epsilon}{\alpha^2} = \frac{n_e M(A, Z)/Z + \epsilon'_e + \epsilon_n}{\alpha^2}, \quad (2.6.16)$$

$$P = P_e + P_n, \quad (2.6.17)$$

$$n = n_e \frac{A}{Z} + n_n. \quad (2.6.18)$$

Полученная в результате зависимость (уравнение состояния)  $P = P(\rho)$  изображена на рис. 2.2. Отклонения от уравнения состояния идеального газа электронов и  ${}^{56}_{26}\text{Fe}$  становятся заметными при  $\rho \geq 10^7$  г/см<sup>3</sup>. Образование нейтронных капель начинается при  $\rho \sim 3,18 \cdot 10^{11}$  г/см<sup>3</sup>, где  $(A, Z) \sim (122; 39,1)$ , т.е. в районе элемента иттрия, при этом  $E_{F_e} \sim 23,6$  МэВ. При плотностях выше указанного значения свободные нейтроны вносят все больший вклад в полное давление и плотность. При  $\rho \sim 4,54 \cdot 10^{12}$  г/см<sup>3</sup>, когда  $(A, Z) \sim (187; 48,4)$ , нейтроны обеспечивают 60% давления и плотности; ядра быстро становятся все менее существенными. Выше этой плотности Гаррисон и Уилер просто использовали уравнение состояния идеального  $n$ - $p$ - $e$ -газа, которое приведено у нас в разд. 2.5; при этом происходит гладкое сшивание результатов как для  $P$ , так и для  $dP/d\rho$ . К уточнению этого уравнения состояния при плотностях выше точки образования нейтронных капель мы обратимся в гл. 8. В следующем разделе обсуждаются уточнения для плотностей от  $10^7$  г/см<sup>3</sup> до этой точки.

## 2.7. УРАВНЕНИЕ СОСТОЯНИЯ БЕЙМА—ПЕТИКА—САЗЕРЛЕНДА

Уравнение состояния Гаррисона—Уилера имеет то преимущество, что  $M(A, Z)$  представляется довольно простой функцией. Однако для реальных ядер  $A$  и  $Z$  принимают дискретные значения, и, кроме того, при определении связи ядра важную роль играют оболочечные эффекты. Эти эффекты были учтены Солпитером [496], который определил химический состав и уравнение состояния при плотностях от  $10^7$  до  $3,4 \cdot 10^{11}$  г/см<sup>3</sup>, т.е. до образования нейтронных капель.

Бейм, Петик и Сазерленд (BPS) [56] улучшили результаты Солпитера, используя более точную полуэмпирическую массовую формулу [417]. Кроме того, они заметили, что решеточная энергия, определяемая равенством (2.4.9), существенна при определении *химического состава*, хотя дает лишь небольшую поправку к электронному давлению. Причина состоит в том, что тип находящегося в равновесии изотопа определяется главным образом соотношением между поверхностной энергией ядра и кулоновской энергией. При плотности  $10^{11}$  г/см<sup>3</sup> решеточная энергия уменьшает положительную кулоновскую энергию ядра примерно на 15%, и это оказывает заметное влияние на состав.

Чтобы вывести уравнение состояния BPS, добавим энергию решетки к выражению (2.6.6):

$$\varepsilon = n(1 - Y_n) \frac{M(A, Z)}{A} + \varepsilon'_e(n_e) + \varepsilon_n(n_n) + \varepsilon_L. \quad (2.7.1)$$