

$$P = P_e + P_n, \quad (2.6.17)$$

$$n = n_e \frac{A}{Z} + n_n. \quad (2.6.18)$$

Полученная в результате зависимость (уравнение состояния) $P = P(\rho)$ изображена на рис. 2.2. Отклонения от уравнения состояния идеального газа электронов и ${}^{56}_{26}\text{Fe}$ становятся заметными при $\rho \geq 10^7$ г/см³. Образование нейтронных капель начинается при $\rho \sim 3,18 \cdot 10^{11}$ г/см³, где $(A, Z) \sim (122; 39,1)$, т.е. в районе элемента иттрия, при этом $E_{F_e} \sim 23,6$ МэВ. При плотностях выше указанного значения свободные нейтроны вносят все больший вклад в полное давление и плотность. При $\rho \sim 4,54 \cdot 10^{12}$ г/см³, когда $(A, Z) \sim (187; 48,4)$, нейтроны обеспечивают 60% давления и плотности; ядра быстро становятся все менее существенными. Выше этой плотности Гаррисон и Уилер просто использовали уравнение состояния идеального n - p - e -газа, которое приведено у нас в разд. 2.5; при этом происходит гладкое сшивание результатов как для P , так и для $dP/d\rho$. К уточнению этого уравнения состояния при плотностях выше точки образования нейтронных капель мы обратимся в гл. 8. В следующем разделе обсуждаются уточнения для плотностей от 10^7 г/см³ до этой точки.

2.7. УРАВНЕНИЕ СОСТОЯНИЯ БЕЙМА—ПЕТИКА—САЗЕРЛЕНДА

Уравнение состояния Гаррисона—Уилера имеет то преимущество, что $M(A, Z)$ представляется довольно простой функцией. Однако для реальных ядер A и Z принимают дискретные значения, и, кроме того, при определении связи ядра важную роль играют оболочечные эффекты. Эти эффекты были учтены Солпитером [496], который определил химический состав и уравнение состояния при плотностях от 10^7 до $3,4 \cdot 10^{11}$ г/см³, т.е. до образования нейтронных капель.

Бейм, Петик и Сазерленд (BPS) [56] улучшили результаты Солпитера, используя более точную полуэмпирическую массовую формулу [417]. Кроме того, они заметили, что решеточная энергия, определяемая равенством (2.4.9), существенна при определении *химического состава*, хотя дает лишь небольшую поправку к электронному давлению. Причина состоит в том, что тип находящегося в равновесии изотопа определяется главным образом соотношением между поверхностной энергией ядра и кулоновской энергией. При плотности 10^{11} г/см³ решеточная энергия уменьшает положительную кулоновскую энергию ядра примерно на 15%, и это оказывает заметное влияние на состав.

Чтобы вывести уравнение состояния BPS, добавим энергию решетки к выражению (2.6.6):

$$\varepsilon = n(1 - Y_n) \frac{M(A, Z)}{A} + \varepsilon'_e(n_e) + \varepsilon_n(n_n) + \varepsilon_L. \quad (2.7.1)$$

Здесь из равенства (2.4.9) в предположении объемноцентрированной кубической решетки имеем

$$\varepsilon_L = -1,444Z^{2/3}e^2n_e^{4/3}. \quad (2.7.2)$$

Условие $\partial\varepsilon/\partial Y_n = 0$ теперь дает (при использовании уравнения (2.6.7))

$$E_{F_n} = \frac{M(A, Z) + Z(E_{F_e} - m_e c^2) + 4Z\varepsilon_L/3n_e}{A}. \quad (2.7.3)$$

Образование нейтронных капель происходит, когда правая часть выражения (2.7.3) становится равной $m_n c^2$. (Строго говоря, нужно учесть еще энергию взаимодействия высвобожденных нейтронов с ядрами, но этот эффект незначителен.)

При последующем обсуждении будем считать, что плотность ниже точки образования нейтронных капель, определяемой уравнением (2.7.3), и положим $\varepsilon_n = 0$.

Состав равновесной смеси можно определить следующим образом. Зафиксируем значение n . Далее возьмем пару пробных значений (A, Z) . Поскольку $M(A, Z)$ протабулировано и $n_N = n/A$, $n_p = Zn/A$, то мы можем вычислить ε . Испробуем все возможные значения (A, Z) . Те значения, которые минимизируют ε , определяют вид находящихся в равновесии ядер.

Давление определяется равенством

$$P = n^2 \left. \frac{\partial(\varepsilon/n)}{\partial n} \right|_{A, Z} = P_e + P_L, \quad (2.7.4)$$

где P_e — давление идеального ферми-газа (2.3.5) и

$$P_L = \frac{1}{3}\varepsilon_L \quad (2.7.5)$$

[ср. с равенством (2.4.11)].

Фазовый переход от одного стабильного изотопа к другому сопровождается скачком в величинах n и $\rho = \varepsilon/c^2$, так как давление внутри звезды должно быть непрерывной функцией радиуса. Величину скачка можно оценить так. Поскольку $P_L \ll P_e$, а P_e зависит только от n_e , концентрация n_e фактически должна быть непрерывной на границе фаз. Но $n_p = nZ/A$, и потому

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} \approx \frac{\Delta n}{n} \approx -\frac{\Delta(Z/A)}{Z/A}. \quad (2.7.6)$$

Например, фазовый переход от ^{56}Fe ($Z/A = 0,4643$) к ^{62}Ni ($Z/A = 0,4516$) приводит к росту плотности на 2,9%.

Из-за этих разрывов для определения давления, при котором в действительности происходит фазовый переход, приходится использовать извест-

Таблица 2.1

ЯДРА, НАХОДЯЩИЕСЯ В РАВНОВЕСИИ НИЖЕ ТОЧКИ ОБРАЗОВАНИЯ
НЕЙТРОННЫХ КАПЕЛЬ

Ядро	ρ_{\max} , г/см ³		Ядро	ρ_{\max} , г/см ³	
	(а) BPS	(б) JGK ¹⁾		(а) BPS	(б) JGK ¹⁾
⁵⁶ Fe	$8,1 \times 10^6$	$8,1 \times 10^6$	⁷⁸ Ni	$1,6 \times 10^{11}$	$8,4 \times 10^{10}$
⁶² Ni	$2,7 \times 10^8$	$2,8 \times 10^8$	⁷⁶ Fe	$1,8 \times 10^{11}$	—
⁶⁴ Ni	$1,2 \times 10^9$	$1,3 \times 10^9$	¹²⁶ Ru	—	$1,2 \times 10^{11}$
⁶⁶ Ni	—	$1,5 \times 10^9$	¹²⁴ Mo	$1,9 \times 10^{11}$	$1,7 \times 10^{11}$
⁸⁶ Kr	—	$3,1 \times 10^9$	¹²² Zr	$2,7 \times 10^{11}$	$2,5 \times 10^{11}$
⁸⁴ Se	$8,2 \times 10^9$	$7,6 \times 10^9$	¹²⁰ Sr	$3,7 \times 10^{11}$	$3,6 \times 10^{11}$
⁸² Ge	$2,2 \times 10^{10}$	$2,6 \times 10^{10}$	¹²² Sr	—	$3,8 \times 10^{11}$
⁸⁰ Zn	$4,8 \times 10^{10}$	$6,0 \times 10^{10}$	¹¹⁸ Kr	$4,3 \times 10^{11}$	$4,4 \times 10^{11}$

¹⁾ Массы первых шести ядер известны из эксперимента. Остальные получены на основе массовой формулы Йенеке — Гарви — Кельсона (JGK) (сравните с работой [598]).

ный критерий равенства площадей Максвелла¹⁾, что является недостатком обсуждавшейся выше процедуры. Гораздо удобнее найти минимум термодинамического потенциала g при постоянном P [ср. с уравнением (2.1.18)]. При $T = 0$ из уравнения (2.1.19) следует

$$g = \frac{\varepsilon + P}{n} = \frac{M(A, Z) + ZE_{F_e} + \frac{4}{3}ZE_L/n_e}{A} \quad (2.7.7)$$

Теперь зафиксируем значение P . Выберем пробные величины A и Z и разрешим трансцендентное уравнение (2.7.4) относительно $n_e = x^3/3\pi^2\lambda_e^3$. Затем, пользуясь равенством (2.7.7), вычислим g . Будем повторять эту процедуру, пока не определим значения (A, Z) , отвечающие минимуму g . Полученная в результате последовательность ядер, согласно BPS, приведена в табл. 2.1, а уравнение состояния представлено на рис. 2.2.

Теперь видна важность оболочечных эффектов: ядра от ⁸⁴Se до ⁷⁶Fe имеют замкнутые оболочки, содержащие 50 нейтронов, а ядра от ¹²⁴Mo до ¹¹⁸Kr — замкнутые оболочки из 80 нейтронов. Образование нейтронных капель происходит при $\rho \approx 4,3 \cdot 10^{11}$ г/см³, когда отношение Z/A для ¹¹⁸Kr равно 0,3051.

Мы повторили вычисления, сделанные Беймом, Петиком и Сазерлендом, используя экспериментальные данные для $M(A, Z)$, затабулированные в [599] для условий, доступных при измерениях, а также теоретическую экстраполяцию Йенеке, Гарви и Кельсона, приведенную в [598] для нейтронно-избыточных ядер. Получающаяся в результате последовательность ядер приведена в столбце «б» табл. 2.1. Это уравнение состояния не отличается от уравнения BPS, за исключением точек в непосредственной близости к

¹⁾ См., например, разд. 8.6 книги [479], где обсуждаются эти вопросы.

фазовому переходу, где при заданном ρ соответствующие значения P могут различаться примерно на 5%. Мы приходим к выводу, что уравнение состояния довольно хорошо установлено вплоть до точки образования нейтронных капель.

Вычислительное упражнение 2.28. Повторите процедуру BPS, используя другую формулу для $M(A, Z)$, например, описанную в работе [598]. Как ваше уравнение состояния соотносится с уравнением BPS?

Вычислительное упражнение 2.29. Покажите, что в предположении справедливости уравнения состояния BPS при заданном давлении действительно имеется только один тип атомных ядер. Перепишите уравнение (2.7.1), допуская, что имеется доля f ядер (A_1, Z_1) и доля $(1 - f)$ ядер (A_2, Z_2) . Покажите, что, за исключением случаев разрывной плотности, $f = 0$ или $f = 1$.

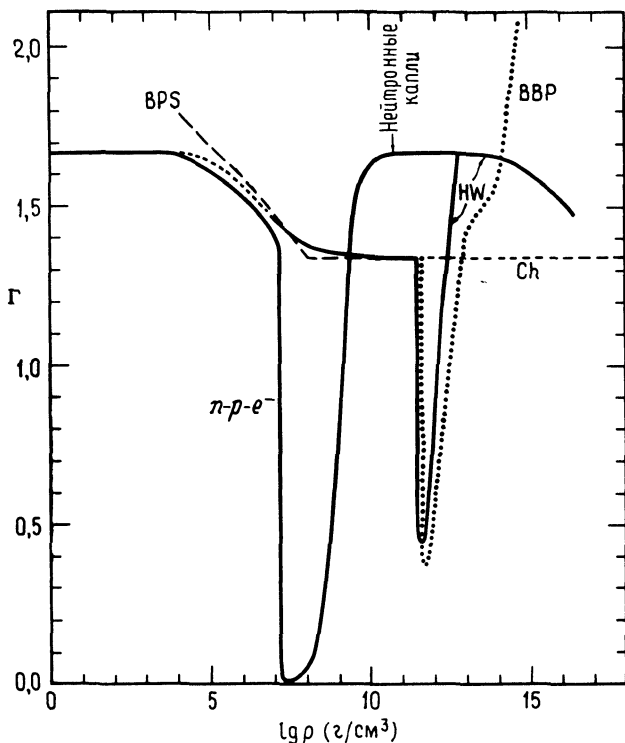


Рис. 2.3. Показатель адиабаты $\Gamma = (d \ln P)/(d \ln \rho)$ как функция ρ для уравнений состояния, представленных на рис. 2.2.

РЕЗЮМЕ 2.1.

*Уравнение состояния холодного вещества
при плотностях ниже точки образования нейтронных капель*

1. Уравнение состояния вещества при нулевой температуре можно считать хорошо известным для плотностей ниже точки образования нейтронных капель, $\rho_{\text{drip}} \approx 4 \cdot 10^{11}$ г/см³. Преобладающий вклад в давление обеспечивают вырожденные электроны, которые становятся релятивистскими при плотностях выше $\sim 10^7$ г/см³. Положительные заряды сконцентрированы в отдельных ядрах, которые образуют регулярную решетку с кулоновским взаимодействием, погруженную в электронный газ.

2. Если вещество находится в основном состоянии, то можно предположить, что между ядрами имеется равновесие, т.е. энергию системы нельзя понизить, меняя ее состав с помощью сильных, слабых или электромагнитных взаимодействий. Можно найти отвечающий равновесию изотоп в зависимости от плотности. При плотностях ниже $\sim 10^7$ г/см³ в основном состоянии находятся ядра ${}^{56}_{26}\text{Fe}$. При больших плотностях равновесию соответствуют ядра, все более обогащенные нейтронами. Все ядра стабилизированы относительно β -распада заполненным ферми-морем электронов.

3. Уравнение состояния для плотностей ниже точки образования нейтронных капель определяет структуру планет и устойчивых белых карликов. В белых карликах полное равновесие, по-видимому, не достигается. Следовательно, применимо уравнение состояния Чандрасекара с кулоновскими поправками [496]. Химический состав зависит от эволюционной истории звезды и определяет средний молекулярный вес, приходящийся на один электрон, μ_e (ср. с гл. 3). В нейтронных звездах вещество при рассматриваемых плотностях находится в полном равновесии, и потому применимо равновесное уравнение состояния (например, уравнение BPS).

4. Результаты применения различных моделей для уравнения состояния холодного вещества при плотностях ниже точки образования нейтронных капель суммированы на рис. 2.2 и 2.3 и в табл. 2.2.

Таблица 2.2

ПРИМЕРЫ УРАВНЕНИЙ СОСТОЯНИЯ НИЖЕ ПЛОТНОСТИ ОБРАЗОВАНИЯ
НЕЙТРОННЫХ КАПЕЛЬ

Уравнение состояния	Диапазон значений плотности, г/см ³	Химический состав	Теория
Чандрасекар [111, 112], идеальный электронный газ (Ch)	$0 \leq \rho \leq \infty$	e^- (ядра, определяемые μ_e)	Невзаимодействующие электроны
Идеальный n - p - e^- -газ	$0 \leq \rho \leq 1,2 \cdot 10^7$ $1,2 \cdot 10^7 \leq \rho \leq \infty$	e^- , p n , p , e^-	Равновесное вещество
Фейнман — Метрополис — Теллер [196] (FMT)	$7,9 \leq \rho \leq 10^4$	e^- , ${}^{56}_{26}\text{Fe}$	Атомная модель Томаса — Ферми — Дирака
Гаррисон — Уилер [259] (HW)	$7,9 \leq \rho \leq 10^4$ $10^4 \leq \rho \leq 10^7$	e^- и ${}^{56}_{26}\text{Fe}$	Так же, как FMT Невзаимодействующие электроны
	$10^7 \leq \rho \leq 3 \cdot 10^{11}$	e^- и равновесные изотопы	Полуэмпирическая массовая формула; равновесное вещество
Выше точки образования нейтронных капель	$3 \cdot 10^{11} < \rho \leq 4 \cdot 10^{12}$ $4,5 \cdot 10^{12} < \rho \leq \infty$	e^- , n и равновесные изотопы	Так же, как в идеальном n - p - e^- -газе
Бейм — Петтик — Сазерленд [56] (BPS)	$7,9 \leq \rho \leq 10^4$ $10^4 < \rho \leq 8 \cdot 10^6$	e^- , ${}^{56}_{26}\text{Fe}$	Так же, как FMT Идеальные электроны с учетом поправок от кулоновской решетки
	$8 \cdot 10^6 < \rho \leq 4,3 \cdot 10^{11}$	e^- и равновесные изотопы	Ядерные потенциалы, известные из опыта (с экстраполяцией); кулоновская энергия решетки; равновесное вещество