После открытия нейтрона стало ясно [216, 338, 425], что при очень высоких плотностях электроны должны взаимодействовать с протонами, образуя нейтроны вследствие обратного бета-распада. Побудительным стимулом указанных работ послужила идея, что источником энергии нормальных массивных звезд мог бы быть обратный бета-распад в нейтронном ядре. Много позже Шацман [508—510] и независимо Гаррисон и Уилер [259] учли обратный бета-распад в уравнении состояния вещества внутри белых карликов. Шацман, а также Гаррисон, Вакано и Уилер [260] показали, что обратный бета-распад также вызывает динамическую неустойчивость наиболее массивных белых карликов с массой выше $\sim 1\, M_\odot$ и радиусом меньше $4 \cdot 10^3$ км. Устойчивость не восстанавливается до тех пор, пока фактически все электроны и протоны не будут тесно сжаты вместе. При таких высоких плотностях газ должен состоять почти полностью из нейтронов. В этом состоянии рассматриваемый объект будет иметь массу порядка $M_\odot$ и радиус около 10 км. Таким образом, должен существовать новый класс стабильных компактных звезд — это нейтронные звезды, которые были предсказаны в 30-х годах.

На этом мы заканчиваем обзор раннего этапа разработки теории белых карликов. Мы вернемся к этому рассказу в разд. 9.1, где проследим за развитием гипотезы нейтронных звезд.

3.2. НАЧАЛЬНАЯ СТАДИЯ ВЫРОЖДЕНИЯ

В гл. 1 мы представили довольно убедительные данные в пользу того, что конечным состоянием звезды, которая израсходовала свое ядерное горючее, должен быть белый карлик, при условии что эта звезда не очень массивна. Если учесть условия гидростатического равновесия, то можно надежнее проследить судьбу звезды, исчерпавшей ядерное горючее.

Для сферически-симметричного распределения вещества масса внутри сферы радиуса r определяется выражением

$$m(r) = \int_0^r \rho 4\pi r^2\, dr, \quad \text{или} \quad \frac{dm(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho. \tag{3.2.1}$$

Здесь $\rho \approx \rho_0$ — плотность массы покоя, так как рассматривается нерелятивистское вещество. Если звезда находится в устойчивом состоянии, гравитационные силы в каждой точке уравновешиваются силами давления. Чтобы вывести уравнение, описывающее гидростатическое равновесие, рассмотрим бесконечно малый элемент жидкости, лежащий между r и $r + dr$ и имеющий площадь поверхности, перпендикулярной радиусу, равную dA. Гравитационное притяжение между $m(r)$ и массой $dm = \rho dA dr$ такое же, как если бы $m(r)$ была сосредоточена в центре, наружная же масса не оказывает никакого воздействия на dm. Действующая на dm суммарная сила давления, направленная наружу, равна $-[P(r + dr) - P(r)]dA$, так что в равновесии

$$-\frac{dP}{dr}dr\, dA = \frac{Gm(r)}{r^2}dm$$

или

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{Gm(r)\rho}{r^2}. \qquad (3.2.2)$$

В общем случае гидростатическое равновесие выражается условием $\nabla P = -\rho\nabla\Phi$, где Φ — гравитационный потенциал (ср. с разд. 6.1).

Следствием уравнения гидростатического равновесия (3.2.2) является *теорема вириала:* гравитационная потенциальная энергия звезды равна

$$\begin{aligned} W &= -\int_0^R \frac{Gm(r)}{r}\rho 4\pi r^2\,dr \\ &= \int_0^R \frac{dP}{dr}4\pi r^3\,dr \\ &= -3\int_0^R P4\pi r^2\,dr, \end{aligned} \qquad (3.2.3)$$

где при переходе от первого равенства ко второму было использовано уравнение (3.2.2), после чего выполнено интегрирование по частям.

Если газ описывается адиабатическим уравнением состояния

$$P = K\rho_0^\Gamma \qquad (K, \Gamma \text{ — постоянные}), \qquad (3.2.4)$$

то плотность энергии газа (исключая энергию, соответствующую массе покоя) равна

$$\varepsilon' = \frac{P}{\Gamma - 1}. \qquad (3.2.5)$$

Этот результат является следствием первого закона термодинамики в предположении адиабатического изменения:

$$d\left(\frac{\varepsilon}{\rho_0}\right) = -Pd\left(\frac{1}{\rho_0}\right). \qquad (3.2.6)$$

Интегрирование этого выражения с использованием уравнения (3.2.4) приводит к соотношению

$$\varepsilon = \rho_0 c^2 + \frac{P}{\Gamma - 1}, \qquad (3.2.7)$$

которое и дает желаемый результат для $\varepsilon' \equiv \varepsilon - \rho_0 c^2$.

Таким образом, равенство (3.2.3) можно переписать в виде

$$W = -3(\Gamma - 1)U, \qquad (3.2.8)$$

где

$$U = \int_0^R \varepsilon' 4\pi r^2\, dr \tag{3.2.9}$$

— полная внутренняя энергия звезды.

Упражнение 3.1. Пусть E_T — кинетическая энергия поступательного движения частиц, не включающая в себя энергию, связанную с внутренними степенями свободы (например, вращательными или колебательными). Покажите, что для идеального газа Максвелла—Больцмана, характеризуемого постоянным показателем адиабаты Г, величина E_T связана с U соотношением $E_T = {}^3\!/_2\,(\Gamma - 1)U$. Далее покажите, что вириальное соотношение (3.2.3) для такого газа может быть записано в виде

$$E_T = -\tfrac{1}{2}W.$$

Полная энергия звезды $E = W + U$ равна

$$E = -\frac{3\Gamma - 4}{3(\Gamma - 1)}|W|, \tag{3.2.10}$$

где $W \sim -GM^2/R$.

Упражнение 3.2. Покажите, что если уравнение (3.2.4) справедливо всюду внутри звезды, то гравитационная потенциальная энергия равна

$$W = -\frac{3(\Gamma - 1)}{5\Gamma - 6}\frac{GM^2}{R}. \tag{3.2.11}$$

Указание: перепишите уравнение (3.2.3) в форме

$$W = -3\int_0^M \frac{P}{\rho}\, dm(r).$$

Проинтегрируйте это выражение по частям и воспользуйтесь равенством

$$d\left(\frac{P}{\rho}\right) = \frac{\Gamma - 1}{\Gamma} Gm(r)\, d\left(\frac{1}{r}\right).$$

Проинтегрируйте по частям еще раз.

Без ядерного горючего E убывает благодаря излучению. Согласно выражениям (3.2.10) и (3.2.11), из условия $\Delta E < 0$ при $\Gamma \geqslant 4/3$ следует $\Delta R < 0$, т.е. звезда сжимается. Может ли звезда сжиматься непрерывно, черпая энергию из бесконечных запасов гравитационной потенциальной энергии до тех пор, пока R не обратится в нуль (или пока звезда не сколлапсирует в черную дыру)? Как мы сейчас покажем для звезд с $M \sim M_\odot$, ответ оказывается отрицательным.

Предположим, что давление во время такого квазистатического коллапса определятся законом идеального газа Максвелла—Больцмана.

$$P = \frac{\rho_0}{\mu m_u} kT, \tag{3.2.12}$$

где, например, для чистого ионизированного углерода $\mu = 12/7$ [ср. с уравнением (2.3.17)]. Тогда, согласно вириальному соотношению (3.2.3):

$$-W = 3\int_0^R P4\pi r^2\,dr = \frac{3k\bar{T}}{\mu m_u}\int_0^R \rho_0 4\pi r^2\,dr = \frac{3M}{\mu m_u}k\bar{T}, \qquad (3.2.13)$$

где $\bar{T}$ — средняя температура звезды. Таким образом, $\bar{T} \propto M/R$, т.е. T возрастает при уменьшении R. Однако $\bar{\rho} \propto M/R^3$, так что плотность растет еще быстрее. Мы теперь покажем, что это приводит к нарушению соотношения Максвелла—Больцмана (3.2.12); электронный газ становится вырожденным, что приводит к ненулевому давлению даже при нулевой температуре.

Типичный (т.е. среднеквадратичный) разброс по импульсам электронов в газе Максвелла—Больцмана равен

$$\Delta p_e \sim \left(6m_e k\bar{T}\right)^{1/2} \sim \left(\frac{12m_e GMm_u\mu}{7R}\right)^{1/2}, \qquad (3.2.14)$$

где мы положили $\Gamma = 5/3$ и использовали уравнения (3.2.13) и (3.2.11).

Упражнение 3.3. Проверьте первое соотношение в выражении (3.2.14). Для двух электронов

$$\Delta p_{\rm rms} = \left\langle (\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2)^2 \right\rangle^{1/2} = \left\langle 2\mathbf{p}_1^2 \right\rangle^{1/2}.$$

Заметим, что в выражениях (3.2.13) и (3.2.14) $\bar{T}$ имеет слегка различный смысл.

Типичное расстояние между электронами равно

$$\Delta q_e \sim \left(\frac{\mu_e m_u}{\rho_0}\right)^{1/3} \sim \left(\frac{4\mu_e m_u R^3}{M}\right)^{1/3}. \qquad (3.2.15)$$

Таким образом, объем, занимаемый электроном в фазовом пространстве, равен

$$\begin{aligned}(\Delta p_e \Delta q_e)^3 &\sim 4\mu_e\left(\frac{12\mu}{7}\right)^{3/2}\left[(Gm_e R)^{1/2} m_u^{5/6} M^{1/6}\right]^3 \\ &\sim 40\left[1 \times 10^{-26}\left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{1/6}\left(\frac{R}{R_\odot}\right)^{1/2} \text{г}\cdot\text{см}^2\cdot\text{с}^{-1}\right]^3 \\ &\sim 180h^3\left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{1/2}\left(\frac{R}{R_\odot}\right)^{3/2}. \qquad (3.2.16)\end{aligned}$$

Поэтому, когда звезда с массой 1 $M_\odot$ сжимается до $R \sim 3 \cdot 10^{-2} R_\odot$, фазовый объем, приходящийся на один электрон, будет порядка h^3. В этих условиях принцип запрета Паули становится существенным и приходится пользоваться статистикой Ферми—Дирака. Как мы видели в предыдущей главе, давление в таком газе не исчезает даже при нулевой температуре. Поэтому теперь надо рассмотреть свойства равновесных систем, а именно белых карликов, поддерживаемых давлением вырожденных электронов.

3.3. ПОЛИТРОПЫ

Уравнение состояния идеального ферми-газа сводится к простой политропной форме (3.2.4) в предельных случаях нерелятивистских ($\Gamma = 5/3$) и ультрарелятивистских ($\Gamma = 4/3$) электронов [см. уравнения (2.3.21)—(2.3.23)].

Равновесные системы с таким уравнением состояния называются *политропами;* их анализ выполняется относительно просто. Сначала мы обсудим свойства белых карликов, рассматривая их как политропы в предельных случаях низкой ($\Gamma = 5/3$) и высокой ($\Gamma = 4/3$) плотности. Затем опишем промежуточный режим и поправки к политропной картине.

Условия гидростатического равновесия (3.2.1) и (3.2.2), скомбинированные вместе, дают

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(\frac{r^2}{\rho}\frac{dP}{dr}\right) = -4\pi G\rho. \tag{3.3.1}$$

Подставим сюда уравнение состояния (3.2.4) и запишем

$$\Gamma \equiv 1 + \frac{1}{n}, \tag{3.3.2}$$

где n называется индексом политропы. Полученное уравнение можно переписать в безразмерной форме, введя величины

$$\rho = \rho_c\theta^n, \tag{3.3.3}$$

$$r = a\xi, \tag{3.3.4}$$

$$a = \left[\frac{(n+1)K\rho_c^{(1/n-1)}}{4\pi G}\right]^{1/2}, \tag{3.3.5}$$

где $\rho_c = \rho(r = 0)$ — плотность в центре звезды. Тогда

$$\frac{1}{\xi^2}\frac{d}{d\xi}\xi^2\frac{d\theta}{d\xi} = -\theta^n. \tag{3.3.6}$$