Поэтому, когда звезда с массой 1 $M_\odot$ сжимается до $R \sim 3 \cdot 10^{-2} R_\odot$, фазовый объем, приходящийся на один электрон, будет порядка h^3. В этих условиях принцип запрета Паули становится существенным и приходится пользоваться статистикой Ферми—Дирака. Как мы видели в предыдущей главе, давление в таком газе не исчезает даже при нулевой температуре. Поэтому теперь надо рассмотреть свойства равновесных систем, а именно белых карликов, поддерживаемых давлением вырожденных электронов.

3.3. ПОЛИТРОПЫ

Уравнение состояния идеального ферми-газа сводится к простой политропной форме (3.2.4) в предельных случаях нерелятивистских ($\Gamma = 5/3$) и ультрарелятивистских ($\Gamma = 4/3$) электронов [см. уравнения (2.3.21)—(2.3.23)].

Равновесные системы с таким уравнением состояния называются *политропами;* их анализ выполняется относительно просто. Сначала мы обсудим свойства белых карликов, рассматривая их как политропы в предельных случаях низкой ($\Gamma = 5/3$) и высокой ($\Gamma = 4/3$) плотности. Затем опишем промежуточный режим и поправки к политропной картине.

Условия гидростатического равновесия (3.2.1) и (3.2.2), скомбинированные вместе, дают

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(\frac{r^2}{\rho}\frac{dP}{dr}\right) = -4\pi G\rho. \tag{3.3.1}$$

Подставим сюда уравнение состояния (3.2.4) и запишем

$$\Gamma \equiv 1 + \frac{1}{n}, \tag{3.3.2}$$

где n называется индексом политропы. Полученное уравнение можно переписать в безразмерной форме, введя величины

$$\rho = \rho_c\theta^n, \tag{3.3.3}$$

$$r = a\xi, \tag{3.3.4}$$

$$a = \left[\frac{(n+1)K\rho_c^{(1/n-1)}}{4\pi G}\right]^{1/2}, \tag{3.3.5}$$

где $\rho_c = \rho(r = 0)$ — плотность в центре звезды. Тогда

$$\frac{1}{\xi^2}\frac{d}{d\xi}\xi^2\frac{d\theta}{d\xi} = -\theta^n. \tag{3.3.6}$$

Это уравнение называется *уравнением Лейна—Эмдена* для системы с индексом политропы n. Граничные условия в центре звезды, описываемой политропным уравнением состояния, имеют вид

$$\theta(0) = 1, \tag{3.3.7}$$

$$\theta'(0) = 0. \tag{3.3.8}$$

Условие (3.3.7) непосредственно следует из уравнения (3.3.3). Условие (3.3.8) следует из того факта, что вблизи центра $m(r) \approx 4\pi\rho_c r^3/3$, так что, согласно уравнению (3.2.2), в центре $dP(\rho)/dr = 0 = d\rho/dr$.

Уравнение (3.3.6) легко проинтегрировать численно, начиная с точки $\xi = 0$ с граничными условиями (3.3.7) и (3.3.8). Таким образом, найдем, что при $n < 5$ ($\Gamma > 6/5$) решение монотонно убывает и обращается в нуль при конечном значении $\xi = \xi_1$, т.е. $\theta(\xi_1) = 0$. Эта точка отвечает поверхности звезды, где $P = \rho = 0$. Таким образом, радиус звезды равен

$$R = a\xi_1 = \left[\frac{(n+1)K}{4\pi G}\right]^{1/2} \rho_c^{(1-n)/2n}\xi_1, \tag{3.3.9}$$

а масса равна

$$\begin{aligned} M &= \int_0^R 4\pi r^2 \rho \, dr = 4\pi a^3 \rho_c \int_0^{\xi_1} \xi^2 \theta^n \, d\xi \\ &= -4\pi a^3 \rho_c \int_0^{\xi_1} \frac{d}{d\xi}\left(\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi}\right) d\xi \quad \text{[согласно (3.3.6)]} \\ &= 4\pi a^3 \rho_c \xi_1^2 |\theta'(\xi_1)| = 4\pi \left[\frac{(n+1)K}{4\pi G}\right]^{3/2} \rho_c^{(3-n)/2n} \xi_1^2 |\theta'(\xi_1)|. \end{aligned} \tag{3.3.10}$$

Исключая ρ_c из равенств (3.3.9) и (3.3.10), получим соотношение между массой и радиусом для политропы:

$$M = 4\pi R^{(3-n)/(1-n)} \left[\frac{(n+1)K}{4\pi G}\right]^{n/(n-1)} \xi_1^{(3-n)/(1-n)} \xi_1^2 |\theta'(\xi_1)|. \tag{3.3.11}$$

Упражнение 3.4. Покажите, что отношение средней плотности к плотности в центре для политропы равно $\bar{\rho}/\rho_c = 3|\theta'(\xi_1)|/\xi_1$.

Для нас особый интерес представляют следующие решения[1]:

$$\Gamma = \tfrac{5}{3}, \qquad n = \tfrac{3}{2}, \qquad \xi_1 = 3{,}65375, \qquad \xi_1^2|\theta'(\xi_1)| = 2{,}71406,$$

$$\Gamma = \tfrac{4}{3}, \qquad n = 3, \qquad \xi_1 = 6{,}89685, \qquad \xi_1^2|\theta'(\xi_1)| = 2{,}01824. \quad (3.3.12)$$

Таким образом, для белых карликов с малой плотностью ($\Gamma = 5/3$) получим

$$R = 1{,}122 \times 10^4 \left(\frac{\rho_c}{10^6 \text{ г/см}^3}\right)^{-1/6} \left(\frac{\mu_e}{2}\right)^{-5/6} \text{км}, \qquad (3.3.13)$$

$$M = 0{,}4964 \left(\frac{\rho_c}{10^6 \text{ г/см}^3}\right)^{1/2} \left(\frac{\mu_e}{2}\right)^{-5/2} M_\odot, \qquad (3.3.14)$$

$$= 0{,}7011 \left(\frac{R}{10^4 \text{ км}}\right)^{-3} \left(\frac{\mu_e}{2}\right)^{-5} M_\odot. \qquad (3.3.15)$$

Упражнение 3.5. Выведите результат $M \sim R^{-3}$ из уравнений (3.2.1), (3.2.2) и (3.2.4) с помощью анализа размерности.

Для случая высокой плотности ($\Gamma = 4/3$) получим

$$R = 3{,}347 \times 10^4 \left(\frac{\rho_c}{10^6 \text{ г/см}^3}\right)^{-1/3} \left(\frac{\mu_e}{2}\right)^{-2/3} \text{км}, \qquad (3.3.16)$$

$$M = 1{,}457 \left(\frac{2}{\mu_e}\right)^2 M_\odot. \qquad (3.3.17)$$

Заметим, что в ультрарелятивистском пределе M не зависит от ρ_c и, следовательно, от R. Отсюда можно заключить, что при $\rho_c \to \infty$ электроны в звезде становятся все более и более релятивистскими, а масса асимптотически стремится к значению (3.3.17), когда $R \to 0$.

Предельное значение массы (3.3.17) называется пределом Чандрасекара (часто обозначается M_{Ch}) и представляет собой максимально возможную массу белого карлика. В случае холодного идеального газа зависимость M_{Ch} от химического состава целиком определяется μ_e.

---

[1] Подробную таблицу параметров политропы можно найти в работе Чандрасекара [114].

Интегрирование уравнений, описывающих внутреннее строение белых карликов, с использованием точного уравнения состояния ферми-газа было проделано Чандрасекаром [114] (см. рис. 3.1 и 3.2 ниже). Они, как и следовало ожидать, согласуются с приближением политропы в соответствующих областях.

3.4. ПРЕДЕЛ ЧАНДРАСЕКАРА

Существование ограничения на массу вырожденной звезды является настолько важным результатом, что полезно попытаться получить его наиболее простым способом. Мы сделаем это, следуя рассуждениям Ландау [337], которые применимы как к белым карликам, так и к нейтронным звездам.

Предположим, что звезда радиусом R содержит N фермионов, так что концентрация этих фермионов равна $n \sim N/R^3$. Объем, приходящийся на один фермион, равен $\sim 1/n$ (принцип Паули), поэтому вследствие соотношения неопределенности Гейзенберга импульс фермиона имеет порядок $\hbar n^{1/3}$. Отсюда релятивистская энергия Ферми частиц газа равна

$$E_{\mathrm{F}} \sim \hbar n^{1/3} c \sim \frac{\hbar c N^{1/3}}{R}. \tag{3.4.1}$$

Гравитационная энергия, приходящаяся на один фермион, равна

$$E_{\mathrm{G}} \sim -\frac{GMm_{\mathrm{B}}}{R}, \tag{3.4.2}$$

где $M = Nm_{\mathrm{B}}$. (Заметим, что даже если давление создается электронами, основная часть массы содержится в барионах.) Как будет подробно показано в гл. 6, равновесие достигается при минимальном значении полной энергии E, где

$$E = E_{\mathrm{F}} + E_{\mathrm{G}} = \frac{\hbar c N^{1/3}}{R} - \frac{GNm_{\mathrm{B}}^2}{R}. \tag{3.4.3}$$

Заметим, что оба слагаемых меняются как $1/R$. Когда величина E положительна (т.е. когда N мало), E убывает при увеличении R. Одновременно убывает E_{F}, и электроны становятся все менее релятивистскими, причем $E_{\mathrm{F}} \sim p_{\mathrm{F}}^2 \sim 1/R^2$. Следовательно, при увеличении R в конце концов E_{G} начинает превосходить по абсолютной величине E_{F} и, значит, полная энергия E становится отрицательной, причем при $R \to \infty$ величина E растет, стремясь к нулю. Таким образом, при конечном значении R должно существовать положение устойчивого равновесия.

С другой стороны, если полная энергия E отрицательна (т.е. если N велико), то при уменьшении R величина E может уменьшаться без предела. В этом случае равновесия нет и происходит гравитационный коллапс.