Интегрирование уравнений, описывающих внутреннее строение белых карликов, с использованием точного уравнения состояния ферми-газа было проделано Чандрасекаром [114] (см. рис. 3.1 и 3.2 ниже). Они, как и следовало ожидать, согласуются с приближением политропы в соответствующих областях.

## 3.4. ПРЕДЕЛ ЧАНДРАСЕКАРА

Существование ограничения на массу вырожденной звезды является настолько важным результатом, что полезно попытаться получить его наиболее простым способом. Мы сделаем это, следуя рассуждениям Ландау [337], которые применимы как к белым карликам, так и к нейтронным звездам.

Предположим, что звезда радиусом $R$ содержит $N$ фермионов, так что концентрация этих фермионов равна $n \sim N/R^3$. Объем, приходящийся на один фермион, равен $\sim 1/n$ (принцип Паули), поэтому вследствие соотношения неопределенности Гейзенберга импульс фермиона имеет порядок $\hbar n^{1/3}$. Отсюда релятивистская энергия Ферми частиц газа равна

$$E_{\rm F} \sim \hbar n^{1/3} c \sim \frac{\hbar c N^{1/3}}{R}. \tag{3.4.1}$$

Гравитационная энергия, приходящаяся на один фермион, равна

$$E_{\rm G} \sim -\frac{GMm_{\rm B}}{R}, \tag{3.4.2}$$

где $M = Nm_{\rm B}$. (Заметим, что даже если давление создается электронами, основная часть массы содержится в барионах.) Как будет подробно показано в гл. 6, равновесие достигается при минимальном значении полной энергии $E$, где

$$E = E_{\rm F} + E_{\rm G} = \frac{\hbar c N^{1/3}}{R} - \frac{GNm_{\rm B}^2}{R}. \tag{3.4.3}$$

Заметим, что оба слагаемых меняются как $1/R$. Когда величина $E$ положительна (т.е. когда $N$ мало), $E$ убывает при увеличении $R$. Одновременно убывает $E_{\rm F}$, и электроны становятся все менее релятивистскими, причем $E_{\rm F} \sim p_{\rm F}^2 \sim 1/R^2$. Следовательно, при увеличении $R$ в конце концов $E_{\rm G}$ начинает превосходить по абсолютной величине $E_{\rm F}$ и, значит, полная энергия $E$ становится отрицательной, причем при $R \to \infty$ величина $E$ растет, стремясь к нулю. Таким образом, при конечном значении $R$ должно существовать положение устойчивого равновесия.

С другой стороны, если полная энергия $E$ отрицательна (т.е. если $N$ велико), то при уменьшении $R$ величина $E$ может уменьшаться без предела. В этом случае равновесия нет и происходит гравитационный коллапс.

Следовательно, максимальное количество барионов, при котором еще возможно равновесие, определяется условием $E = 0$ в равенстве (3.4.3). Отсюда

$$N_{max} \sim \left(\frac{\hbar c}{Gm_B^2}\right)^{3/2} \sim 2 \times 10^{57}, \tag{3.4.4}$$

$$M_{max} \sim N_{max} m_B \sim 1{,}5 M_{\odot}. \tag{3.4.5}$$

Таким образом, если отвлечься от числовых множителей, зависящих от химического состава, то максимальная масса вырожденной звезды определяется только фундаментальными постоянными.

Равновесный радиус, отвечающий массе $M$, близкой к $M_{max}$, определяется началом релятивистского вырождения:

$$E_F \gtrsim mc^2, \tag{3.4.6}$$

где $m$ — масса либо электрона, либо нейтрона. Применяя соотношения (3.4.1) и (3.4.4), с помощью этого условия получим

$$R \lesssim \frac{\hbar}{mc}\left(\frac{\hbar c}{Gm_B^2}\right)^{1/2}$$

$$\sim \begin{cases} 5 \times 10^8 \text{ см}, & m = m_e \\ 3 \times 10^5 \text{ см}, & m = m_n. \end{cases} \tag{3.4.7}$$

Таким образом, существуют два различных режима сжатия: один — при плотностях, превосходящих плотность белого карлика, а другой — при плотностях выше ядерной. В обоих случаях $M_{max} \sim M_{\odot}$.

---

*Упражнение 3.6.* Допустим, что мы построили последовательность различных состояний белых карликов, состоящих из чистого $^{56}_{26}\mathrm{Fe}$, для различных значений центральной плотности. Рассмотрите другой набор белых карликов, состоящих из чистого $^{12}_{6}\mathrm{C}$.

а) Как соотносятся физические параметры $P(r)$, $\rho(r)$, $m(r)$ и $r$ в углеродной и железной последовательностях?

б) Определите отношение $M_{max}(^{12}\mathrm{C})/M_{max}(^{56}\mathrm{Fe})$. Воспользуйтесь при этом немодифицированным уравнением состояния Чандрасекара.

---