

Таблица 3.2

ЗНАЧЕНИЯ МАСС И РАДИУСОВ БЕЛЫХ КАРЛИКОВ,
ПОЛУЧЕННЫЕ НА ОСНОВАНИИ ОПТИЧЕСКИХ НАБЛЮДЕНИЙ

	Масса ¹⁾ , M_{\odot}	Радиус ²⁾ , R_{\odot}	Красное смещение ³⁾ , км/с
Сириус В	$1,053 \pm 0,028$	$0,0074 \pm 0,0006$	$89 \pm 1,6$
40 Эридана В	$0,48 \pm 0,02$	$0,0124 \pm 0,0005$	$23,9 \pm 1,3$
Stein 2051	$0,50 \pm 0,05$	$0,0115 \pm 0,0012$?
	или		
	$0,72 \pm 0,08$		

¹⁾ Масса Сириуса — по [217]; 40 Эридана В — по [270] (см., однако, [603]); Stein 2051 — по [552].

²⁾ Радиусы — по [536].

³⁾ Красное смещение Сириуса В — по [244]; 40 Эридана В — по [603].

Наблюдаемое гравитационное красное смещение обычно выражают как эквивалентное доплеровское смещение $\Delta\lambda/\lambda = v/c$, т.е.

$$v = 0,6362 \frac{M/M_{\odot}}{R/R_{\odot}} \text{ км/с} \quad (3.6.4)$$

Это дает 91 ± 8 км/с для Сириуса В и $22 \pm 1,4$ км/с для 40 Эридана В в прекрасном согласии с наблюдениями.

Упражнение 3.8. В литературе приведены следующие данные о красных смещениях: Ван Маанен 2: 14 ± 18 км/с [273] и 33 ± 16 км/с [218]; EG 64: 131 км/с; EG 113: 52 км/с; последние два результата получены Гринстейном и Тримбл [243], которые отмечают, что ошибки приведенных значений могут быть велики. Согласно Шипману [536], радиусы этих звезд равны соответственно $0,0138 R_{\odot}$, $0,0182 R_{\odot}$ и $0,0094 R_{\odot}$. Согласуются ли эти значения с соотношением масса—радиус Хамады и Солпитера?

3.7. ПИКНОЯДЕРНЫЕ РЕАКЦИИ

В плотном веществе ядерные реакции могут идти даже при нулевой температуре. Эти реакции происходят в силу того, что нулевые колебания ионов с энергией $E_0 \sim \hbar\omega_0$ около узла решетки позволяют им преодолевать кулоновский барьер соседних ионов. В этом разделе мы грубо приближенно

оценим скорость таких реакций. Наша задача будет состоять в том, чтобы вычислить коэффициент T , характеризующий проницаемость ионов сквозь электростатический потенциальный барьер, препятствующий их сближению. Величина T зависит от детальной структуры потенциала. Она различна для идеального газа практически свободных ионов и твердого кристаллического тела, характеризуемого регулярной ионной решеткой. Первый случай реализуется внутри нормальных горячих звезд главной последовательности, второй описывает холодное вырожденное вещество в белых карликах. Когда два иона пройдут сквозь электростатический потенциальный барьер и соприкоснутся, вероятность дальнейшего взаимодействия практически не зависит от их начального состояния. Этот эффект будет использован в нашем дальнейшем анализе.

Сначала рассмотрим, как вычисляется скорость таких реакций, когда два иона являются, по существу, свободными и находятся первоначально на большом расстоянии (как в термоядерных реакциях или в реакциях на ускорителе)¹⁾. Напомним, что при малых энергиях сечение взаимодействия двух частиц пропорционально $\pi\lambda^2 \sim 1/E$, где $\lambda = h/p$ — характерная для данной реакции длина волны де Бройля, а E — энергия пары ионов в системе их центра масс. Напомним далее, что вероятность прохождения кулоновского барьера для двух ионов с зарядами Z_1 и Z_2 , относительная скорость которых на большом расстоянии друг от друга равна v , пропорциональна проницаемости (гамовскому фактору):

$$T = \exp(-2\pi\eta), \quad \eta \equiv \frac{Z_1 Z_2 e^2}{hv}. \quad (3.7.1)$$

Исходя из этих соображений, запишем сечение в форме

$$\sigma(E) \equiv \frac{S(E)}{E} \exp(-2\pi\eta), \quad E = \frac{1}{2}\mu v^2, \quad (3.7.2)$$

причем мы ожидаем, что величина $S(E)$, описывающая вклад в сечение чисто ядерного взаимодействия, должна быть *медленно* меняющейся функцией E (здесь μ — приведенная масса). Для определения $S(E)$ можно использовать лабораторные измерения $\sigma(E)$, а в некоторых случаях $S(E)$ можно найти чисто теоретически. Например, величина $S(E)$ для реакции



определяется по известной скорости слабого процесса превращения протона в нейтрон в pp -рассеянии с испусканием позитрона и нейтрино и образованием связанной np -системы (дейтрона).

¹⁾ Более детальное обсуждение термоядерных реакций можно найти, например, в гл. 4 книги Клейтона [135].

Гамовский фактор можно найти из решения уравнения Шредингера вне ядер. Волновая функция относительного движения зарядов Z_1 и Z_2 при $r > R_n$ (R_n — сумма радиусов ядер) равна

$$\psi_l(r, \theta, \phi) = \frac{\chi_l(r)}{r} Y_{lm}(\theta, \phi). \quad (3.7.4)$$

Мы предполагаем, что система находится в состоянии с определенным угловым моментом и пренебрегаем спиновыми эффектами. Функция $\chi_l(r)$ есть решение радиального уравнения Шредингера

$$\frac{d^2 \chi_l}{dr^2} + \frac{2\mu}{\hbar^2} [E - V_l(r)] \chi_l = 0, \quad (3.7.5)$$

где μ — приведенная масса, а

$$V_l(r) = \frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu r^2} + V_c(r), \quad r > R_n,$$

$$V_c(r) = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r}. \quad (3.7.6)$$

При низких энергиях рассеяние в основном идет в сферически-симметричной s -волне. В соответствии с этим положим $l = 0$.

Поведение $V(r)$ показано на рис. 3.4, где при $r > R_n$ изображен $V_l(r)$, а при $r < R_n$ схематически представлен короткодействующий притягивающий ядерный потенциал.

Проницаемость можно определить, не зная детального поведения ядерного потенциала при $r < R_n$. Для потенциала, изображенного на рис. 3.4, в одномерном ВКБ-приближении проницаемость, согласно [349, гл. 4], равна

$$T \equiv \frac{|\chi_{\text{trans}}|^2 v_{\text{trans}}}{|\chi_{\text{inc}}|^2 v_{\text{inc}}} = \frac{4}{(2\theta + 1/2\theta)^2}. \quad (3.7.7)$$

Здесь T определяется как отношение потока прошедших (trans) частиц к потоку падающих (inc), а

$$\theta = \exp\left(\int_a^b |k(x)| dx\right), \quad (3.7.8)$$

$$k(x) = \left(\frac{2\mu}{\hbar^2} [E - V(x)]\right)^{1/2}. \quad (3.7.9)$$

При $\theta \gg 1$

$$T \approx \frac{1}{\theta^2}. \quad (3.7.10)$$

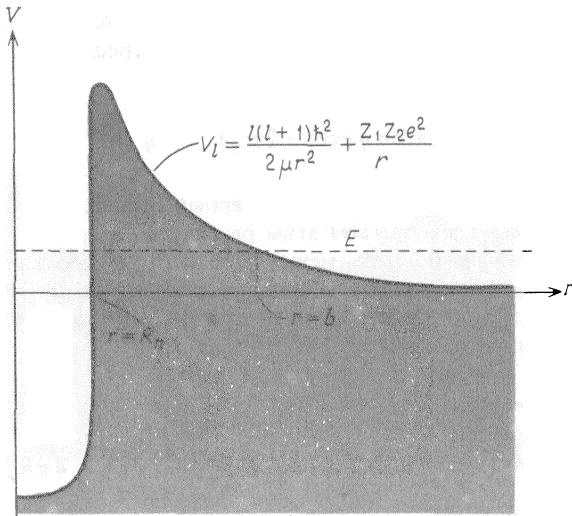


Рис. 3.4. Эффективный потенциал, описывающий относительное движение атомных ядер. При $r < R_n$ ядра фактически находятся в непосредственном контакте и в потенциале главную роль играет притяжение, связанное с короткодействующими ядерными силами. При $r > R_n$ ядерные силы пренебрежимо малы и в потенциале преобладает кулоновская часть. При $r=b$ показана классическая точка поворота, соответствующая движению с энергией E в системе центра масс.

В нашем примере $a_n = R_n \rightarrow 0$, а b определяется выражением

$$E = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{b}. \quad (3.7.11)$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \int_{a_n}^b |k(x)| dx &= \frac{(2\mu E)^{1/2}}{\hbar} \int_0^b \left(\frac{b}{x} - 1 \right)^{1/2} dx \\ &= \frac{\pi Z_1 Z_2 e^2}{\hbar} \left(\frac{\mu}{2E} \right)^{1/2} = \pi \eta \end{aligned}$$

и

$$T = \exp(-2\pi\eta). \quad (3.7.12)$$

Одномерное ВКБ-приближение правильно воспроизводит существенную экспоненту в гамовском факторе. Однако точное решение уравнения Шредингера в кулоновском потенциале дает

$$\frac{|\psi(0)|^2}{|\psi(\infty)|^2} = 2\pi\eta \exp(-2\pi\eta), \quad \eta \gg 1. \quad (3.7.13)$$

Одномерное ВКБ-приближение дает неверный предэкспоненциальный множитель. Мы здесь пренебрегаем этим различием.

Теперь можно найти связь между $S(E)$ и P_n — вероятностью ядерной реакции, когда частицы проникли на расстояние $r = R_n$. Пусть W — скорость реакции (вероятность в секунду) падающего иона Z_1 с ядром (ионом Z_2). Тогда

$$\begin{aligned} W &= (\text{прошедший поток при } R_n) \times 4\pi R_n^2 \times P_n \\ &= (\text{падающий поток}) \times \exp(-2\pi\eta) \times 4\pi R_n^2 P_n. \end{aligned} \quad (3.7.14)$$

Но по определению $\sigma(E)$

$$\begin{aligned} W &\equiv \sigma(E) \times (\text{падающий поток}) \\ &= \frac{S(E)}{E} \exp(-2\pi\eta) \times (\text{падающий поток}). \end{aligned} \quad (3.7.15)$$

Сравнение выражений (3.7.14) и (3.7.15) дает

$$S(E) = 4\pi R_n^2 P_n E. \quad (3.7.16)$$

Таким образом, неизвестная вероятность P_n выражается через поддающуюся измерению (в принципе) величину $S(E)$.

Перейдем теперь к реакциям в кристаллической решетке. Скорость реакции для одной пары ионов равна

$$W = (\text{падающий поток}) \times T \times 4\pi R_n^2 P_n = v |\psi_{\text{inc}}|^2 \frac{TS(E)}{E}, \quad (3.7.17)$$

где $|\psi_{\text{inc}}|^2$ и T при $r > R_n$ теперь нужно вычислять в решеточном потенциале, а ядерный фактор $S(E)$ остается таким же, как и раньше.

Представим приближенно решеточный потенциал, рассматривая¹⁾ одномерное движение иона между двумя фиксированными тождественными ионами, находящимися на расстоянии $2R_0$. Более подробно мы изучим эту

¹⁾ Изложенные здесь рассуждения представлены согласно Зельдовичу [631].

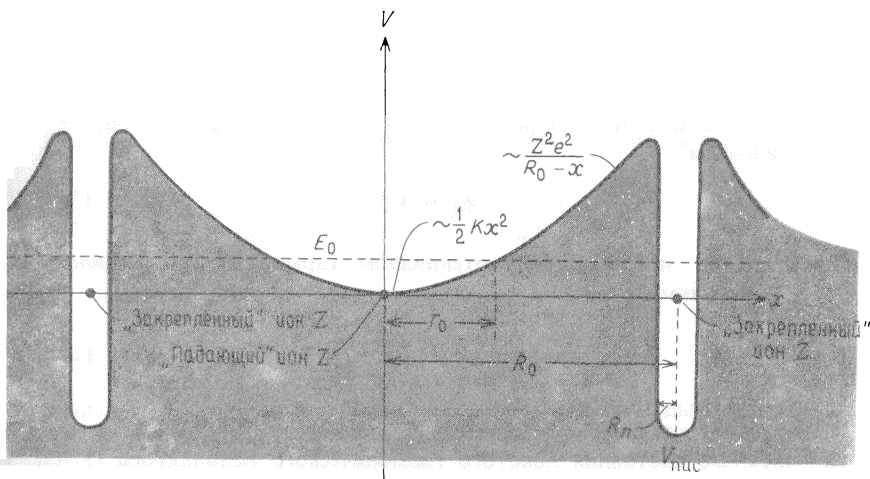


Рис. 3.5. Потенциал, описывающий движение отдельного «падающего» ядра относительно «закрепленных» ядер в одномерной решетке. Ионы (ядра) находятся на расстоянии R_0 . Нулевые колебания с энергией E_0 в осцилляционном потенциале вблизи места нахождения «падающего» иона могут привести к прохождению кулоновского барьера и ядерным реакциям.

одномерную решетку в следующей главе, а сейчас только заметим, что такой решеточный потенциал можно записать в виде

$$V(x) = \frac{Z^2 e^2}{R_0 - x} + \frac{Z^2 e^2}{R_0 + x} - \frac{2Z^2 e^2}{R_0}, \quad |x| < R_0 - R_n. \quad (3.7.18)$$

На рис. 3.5 показан вид этого потенциала, объединенного с короткодействующим ядерным потенциалом вблизи каждого узла, где находится неподвижный ион. Мы предположили, что все ионы имеют заряд Ze и массу m_A и что точка $z = 0$ отвечает положению равновесия. Для $x \ll R_0$ получим

$$V(x) \rightarrow \frac{1}{2} K x^2, \quad K = \frac{4Z^2 e^2}{R_0^3}. \quad (3.7.19)$$

Таким образом, при малых отклонениях от положения равновесия движение оказывается просто гармоническим с энергией нулевых колебаний, равной

$$E_0 = \frac{1}{2} \hbar \omega_0 = \frac{Z e \hbar}{(\mu R_0^3)^{1/2}}. \quad (3.7.20)$$

Упражнение 3.9. Покажите, что ω_0 фактически совпадает с плазменной частотой ионов $\Omega_p = (4\pi Z^2 e^2 n_A / m_A)^{1/2}$, где n_A — средняя концентрация ионов.

Классическая точка поворота r_0 для иона с энергией $E = E_0$ определяется уравнением

$$E_0 = V(r_0). \quad (3.7.21)$$

Приближенно заменяя $V(x)$ потенциалом гармонического осциллятора (3.7.19), получим

$$r_0 = \left(\frac{\hbar}{2Ze} \right)^{1/2} \left(\frac{R_0^3}{\mu} \right)^{1/4}. \quad (3.7.22)$$

В рассматриваемом приближении ψ_{inc} можно считать волновой функцией основного состояния простого гармонического осциллятора (SHO). В трехмерном пространстве она равна

$$|\psi_{\text{SHO}}|^2 = \frac{\tau^3}{\pi^{3/2}} e^{-\tau^2 r^2}, \quad (3.7.23)$$

где

$$\tau = \left(\frac{\mu K}{\hbar^2} \right)^{1/4} = \frac{1}{r_0} \quad (3.7.24)$$

(т.е. ион локализован в объеме $\sim r_0^3$ в окрестности каждого узла решетки). Полагая экспоненциальный множитель в выражении (3.7.23) равным единице, получим

$$|\psi_{\text{inc}}|^2 \approx |\psi_{\text{SHO}}|^2 \approx \frac{1}{r_0^3 \pi^{3/2}}. \quad (3.7.25)$$

Коэффициент пропускания для падающего иона с энергией E_0 снова можно вычислить в ВКБ-приближении:

$$T = \exp \left[-2 \int_a^b |k(x)| dx \right], \quad (3.7.26)$$

где $k(x)$ определяется выражением (3.7.9). Полагая $u = x/R_0$, получим

$$T = \exp \left[-2 \left(\frac{4\mu Z^2 e^2 R_0}{\hbar^2} \right)^{1/2} \int_{r_0/R_0}^{1-R_n/R_0} \left(\frac{1}{1-u^2} - 1 - \alpha \right)^{1/2} du \right], \quad (3.7.27)$$

где

$$\alpha = \frac{E_0}{2Z^2e^2/R_0}. \quad (3.7.28)$$

Безразмерный интеграл в выражении для T можно записать в виде

$$I = \int_{\beta}^{1-R_n/R_0} \left[\frac{(u-\beta)(u+\beta)}{(1-u)(1+u)} \right]^{1/2} du, \quad (3.7.29)$$

где

$$\beta \equiv \frac{r_0}{R_0} = \left(\frac{\alpha}{1+\alpha} \right)^{1/2} \approx \alpha^{1/2}. \quad (3.7.30)$$

Устремляя R_n к нулю, можно взять этот интеграл с помощью таблиц интегралов [98, равенство (256.18)]:

$$I = (1+\beta)E - 2\beta K, \quad (3.7.31)$$

где E и K — полные эллиптические интегралы с модулем

$$k = \frac{1-\beta}{1+\beta}. \quad (3.7.32)$$

В пределе $\beta \ll 1$ имеем

$$I \approx 1 - \beta^2 \ln \left(\frac{1}{\beta} \right)^{1/2}. \quad (3.7.33)$$

Комбинируя равенства (3.7.27), (3.7.30) и (3.7.33), получим

$$T = \frac{R_0}{r_0} \exp \left(-2 \frac{R_0^2}{r_0^2} \right). \quad (3.7.34)$$

Отсюда после некоторых упрощений преобразуем выражение (3.7.17) к виду

$$W = 4 \left(\frac{2}{\pi^3} \right)^{1/2} S \frac{(Z^2 e^2 \mu)^{3/4}}{(\hbar^2 R_0)^{5/4}} \exp \left[-4Ze \frac{(\mu R_0)^{1/2}}{\hbar} \right]. \quad (3.7.35)$$

Упражнение 3.10. Покажите, что при плотностях $\ll 10^{10}$ г/см³ справедливо соотношение $E_0 \ll E_{\text{coul}} \sim Z^2 e^2 / R_0$, т.е. решетка фактически не существует, несмотря на наличие нулевых колебаний.

Следуя Солпитеру и Ван Хорну [499], введем безразмерный параметр длины:

$$\lambda \equiv \frac{\hbar^2}{2\mu Z^2 e^2} \left(\frac{n_A}{2} \right)^{1/3} \quad (3.7.36)$$

$$= \frac{\hbar^2}{2\mu Z^2 e^2} \left(\frac{3}{\pi} \right)^{1/3} \frac{1}{R_0}, \quad (3.7.37)$$

где концентрация ионов n_A оценена в предположении, что в сфере радиусом $R_0/2$ находится один ион. Число реакций на кубический сантиметр в секунду равно

$$P_0 = n_A W = \left(\frac{\rho}{A} \right) A^2 Z^4 S \gamma \lambda^{5/4} \exp(-\epsilon \lambda^{-1/2}), \quad (3.7.38)$$

где мы приняли, что $\rho = A m_u n_A$. В этой формуле ρ выражается в г/см³, S — в МэВ · барн (1 барн = 10^{-24} см²) и

$$\gamma = 1,1 \times 10^{44}, \quad \epsilon = 2,85. \quad (3.7.39)$$

Мы умножим γ на 4, так как каждый ион в объемно центрированной кубической решетке имеет 8 ближайших соседей, а W — вероятность реакции при парном соударении.

Наилучшее к настоящему времени вычисление скорости пикноядерных реакций принадлежит Солпитеру и Ван Хорну [499]. Они использовали более реалистическую форму потенциала решетки с учетом анизотропии и эффекта электронной экранировки и получили следующий результат:

$$P_0 = \left(\frac{\rho}{A} \right) A^2 Z^4 S \gamma \lambda^{7/4} \exp(-\epsilon \lambda^{-1/2}) \text{с}^{-1} \cdot \text{см}^{-3}, \quad (3.7.40)$$

где

$$\gamma = 3,90 \times 10^{46}, \quad \epsilon = 2,638, \quad (3.7.41)$$

или

$$\gamma = 4,76 \times 10^{46}, \quad \epsilon = 2,516. \quad (3.7.42)$$

Эти два набора численных значений отвечают двум различным приближенным потенциалам, которые огрубленно ограничивают истинный потенциал сверху и снизу. Интересно отметить, насколько грубая формула (3.7.38) близка к выражению (3.7.40), особенно если учесть, что зависимость от ϵ появляется в экспоненте. Однако мы еще раз повторим сделанное выше предостережение, что учет дефектов решетки может привести к существенному увеличению полученных скоростей реакций.

При конечных температурах нельзя более считать, что ядро находится в основном состоянии решеточного потенциала. При еще более высоких температурах решетка исчезает и система переходит в термоядерный режим. Скорости реакций во всех этих режимах обсуждались Солпитером и Ван Хорном [499].

Упражнение 3.11. Покажите, что выражение (3.7.36) можно переписать в виде

$$\lambda = \frac{1}{AZ^2} \left(\frac{1}{A} \frac{\rho}{1,36 \times 10^{11} \text{ г/см}^3} \right)^{1/3}. \quad (3.7.43)$$

Упражнение 3.12. Используя равенство (3.7.40), получите пределы концентраций H и C, приведенные в разд. 3.5, доказав, что полное ядерное превращение происходит за характерное время, определяемое условием

$$P_0 t = n_A. \quad (3.7.44)$$

Разрешите уравнение (3.7.44) относительно ρ , положив $t = 10^5$ лет и

$$S_{pp} = 5,38 \times 10^{-25} \text{ МэВ} \cdot \text{барн},$$

$$S_{cc} = 8,83 \times 10^{16} \text{ МэВ} \cdot \text{барн}.$$

Значение S_{cc} взято из работы [203], и его неопределенность, по-видимому, определяется множителем не меньше трех.