Отсюда следует

$$\rho_* = (2{,}4 \times 10^{-8}\ \text{г/см}^3)\mu_e T_*^{3/2}, \tag{4.1.10}$$

где T_* измеряется в кельвинах. Температуру в этом переходном слое можно выразить через светимость, сопоставляя уравнения (4.1.7) и (4.1.10). Это дает

$$L = (5{,}7 \times 10^5\ \text{эрг/с})\frac{\mu}{\mu_e^2}\frac{1}{Z(1+X)}\frac{M}{M_\odot}T_*^{3,5}. \tag{4.1.11}$$

Таким образом, зная L, химический состав и массу белого карлика, можно определить его внутреннюю температуру.

Для примера положим $X = 0$, $Y = 0{,}9$ (доля гелия по массе), $Z = 0{,}1$ и $M = M_\odot$. Отсюда найдем $\mu_e \approx 2$, $\mu \approx 1{,}4$ и, следовательно,

$$L \simeq (2 \times 10^6\ \text{эрг/с})\frac{M}{M_\odot}T_*^{3,5}. \tag{4.1.12}$$

Характерные значения L составляют $10^{-2} - 10^{-5}\ L_\odot$, что отвечает $T_* \approx \approx 10^6 \div 10^7$ К и, следовательно, $\rho_* \leqslant 10^3$ г/см^3 $\ll \rho_c$. Столь низкая плотность в переходном слое подтверждает предположение, что поверхностный слой является относительно тонким и что он не меняет соотношение между массой и радиусом, полученное для холодных звезд. Заметим, также, что kT_* много меньше энергии Ферми электронов в ядре белого карлика.

Упражнение 4.1. С помощью уравнений (4.1.3) и (4.1.7) исключите ρ из уравнения (4.1.2). Затем, проинтегрировав его, получите соотношение

$$T_* = \frac{1}{4{,}25}\frac{\mu m_u}{k}\frac{GM}{R}\left(\frac{R}{r_*} - 1\right), \tag{4.1.13}$$

где r_* — значение радиуса, при котором $T = T_*$. Покажите, что при $T_* = 10^6 \div \div 10^7$ К отсюда следует

$$\frac{R - r_*}{R} \lesssim 10^{-2}. \tag{4.1.14}$$

4.2. ЭЛЕМЕНТАРНЫЙ АНАЛИЗ ОСТЫВАНИЯ БЕЛЫХ КАРЛИКОВ [400, 516]

Когда звезда доходит до стадии белого карлика, единственным источником излучаемой энергии является остаточная тепловая энергия *ионов*. При дальнейшем гравитационном сжатии высвобождается очень мало энергии, так как звезда уже достигла вырожденного состояния. Энергия, выделяемая при испускании нейтрино, существенна только на очень ранней высокотемпературной стадии. Высвобождение тепловой энергии электронов затруднено, поскольку в вырожденном газе большинство состояний с более низкой энергией оказываются занятыми. Если удельная теплоемкость ионов в расчете на один ион равна c_v, то тепловая энергия, приходящаяся на один ион (рассматриваемая только как функция температуры), определяется равенством

$$\text{Тепловая энергия} = \int c_v dT. \tag{4.2.1}$$

Полагая для невырожденного одноатомного газа, что

$$c_v = \tfrac{3}{2}k \tag{4.2.2}$$

получим, что полная тепловая энергия белого карлика равна

$$U = \frac{3}{2}kT\frac{M}{Am_u}. \tag{4.2.3}$$

Здесь T — однородная температура внутри белого карлика, которая в разд. 4.1 обозначалась T_*. Мы предположили, что в состав белого карлика входят только ионы с барионным числом A; в общем случае $1/A$ следует заменить на $1/\mu - 1/\mu_e$. Запас энергии, определяемый равенством (4.2.3), весьма значителен. При $T_* \sim 10^7$ К он достигает $\sim 10^{48}$ эрг, что сравнимо с энерговыделением сверхновой в видимой части спектра. Скорость охлаждения равна $-dU/dt$. Приравнивая эту величину выражению (4.1.12) для L, записанную в форме

$$L = CMT^{7/2}, \tag{4.2.4}$$

где $CM_\odot \approx 2 \cdot 10^6$ эрг/с, получим уравнение

$$-\frac{d}{dt}\left(\frac{3kT/2}{Am_u}\right) = CT^{7/2}, \tag{4.2.5}$$

интегрирование которого дает

$$\frac{3}{5}\frac{k}{Am_u}\left(T^{-5/2} - T_0^{-5/2}\right) = C(t - t_0), \tag{4.2.6}$$

где T_0 — начальная температура. Полагая, что $T_0 \gg T$, мы можем пренебречь зависимостью от T_0 в соотношении (4.2.6) и написать для времени охлаждения $\tau = t - t_0$ выражение

$$\tau = \frac{3}{5}\frac{kTM}{Am_uL}. \tag{4.2.7}$$

Заметим, что из равенства (4.2.4) следует

$$\tau \propto \left(\frac{L}{M}\right)^{-5/7} \tag{4.2.8}$$

Для $L \sim 10^{-3} L_\odot$ имеем $\tau \sim 10^9$ лет. Получается такой порядок величины, какого следовало ожидать: с одной стороны, τ достаточно велико, так что белые карлики не успели стать ненаблюдаемыми, а с другой — достаточно мало, так что типичные светимости белых карликов стали теперь весьма низкими. Как можно заметить, из уравнения (4.2.6) следует, что бóльшую часть времени белый карлик имеет температуру, близкую к современной.

В конце 60-х и начале 70-х годов рассмотренная выше теория остывания приближенно согласовалась с наблюдениями для горячих и ярких белых карликов ($10^{-3} \leqslant L/L_\odot \leqslant 10^{-1}$). Однако для слабых белых карликов ($L \leqslant 10^{-3} L_\odot$) теоретические оценки времени остывания казались завышенными более чем на порядок. Это противоречие проявлялось для слабых белых карликов в звездных скоплениях, где возраст белого карлика, вычисленный на основе формулы (4.2.7), оказывался выше возраста скопления[1]. Кроме того, поскольку τ увеличивается по мере уменьшения L, то должно наблюдаться большое количество белых карликов с малыми светимостями. Однако, например, функция светимости Вейдеманна указывает на недостаток белых карликов с $L \lesssim 10^{-3} L_\odot$.

Как мы теперь знаем, это противоречие было в сущности кажущимся и появилось из-за недооценки неточностей в наблюдениях скоплений и в определении их возраста. Интенсивные поиски привели к обнаружению большого количества не входящих в скопления белых карликов со светимостью вплоть до $L < 10^{-4} L_\odot$. Однако упомянутое кажущееся противоречие стимулировало попытки теоретиков «сократить» время остывания.

В следующих разделах описаны наиболее важные поправки к элементарной теории остывания. Это сделано по следующим двум причинам. Во-первых, по мере улучшения данных наблюдений требуется и более точная теория, с которой эти данные можно было бы сравнить. Во-вторых, новые наблюдения свидетельствуют о неожиданном отсутствии белых карликов с очень малой светимостью $L < 10^{-4} L_\odot$ [301]. Если этот дефицит действительно имеет место, то какой физический эффект может быть ответственным за сокращение времени остывания?

Наиболее важный эффект, которым мы пренебрегли, — это *кристаллизация* ионной решетки [401, 496, 585]. Для достаточно низких температур (и, следовательно, светимостей) удельная теплоемкость в большей степени связана с колебаниями ионов решетки, чем со свободным движением. Дебаевская температура ($\theta_D \sim 10^7$ K) является критической температурой, ниже которой c_v быстро падает, что ведет к более быстрому остыванию. Учет этого обстоятельства должен обеспечивать улучшение согласия теории с наблюдениями. В следующих разделах мы в основных чертах построим теорию кристаллизации и теплоемкости ионной решетки и применим результаты к белым карликам.

---

[1] Возраст скопления по существу совпадает со временем жизни на главной последовательности наиболее ярких звезд скопления в предположении, что все звезды образовались в одно и то же время; см. приложение А.