

Заметим, что для ^{12}C справедливо неравенство $\theta_D < T_m < T_g$ при условии, что $\rho \leq 10^6$ г/см.

4.4. ТЕПЛОЕМКОСТЬ КУЛОНОВСКОЙ РЕШЕТКИ

При $T \gg T_g$ ионы можно рассматривать как идеальный газ Максвелла—Больцмана и, следовательно, теплоемкость, приходящаяся на один ион, равна

$$c_v \sim \frac{3}{2}k, \quad T \gg T_g. \quad (4.4.1)$$

Это значение было использовано в разд. 4.2 при элементарном обсуждении остывания белых карликов.

Когда температура опускается ниже T_g , начинается формирование решетки. При этом теплоемкость увеличивается вдвое из-за дополнительного вклада потенциальной энергии решетки, равного $kT/2$ на каждую моду колебаний. Таким образом,

$$c_v \sim 3k, \quad \theta_D \ll T \ll T_g. \quad (4.4.2)$$

При дальнейшем охлаждении до $T \leq \theta_D$ становятся существенными квантовые эффекты и c_v падает много ниже значений (4.4.1) и (4.4.2). Когда $T \rightarrow 0$, то $c_v \sim T^3$. Поскольку этот режим может играть существенную роль при сопоставлении данных наблюдений с теоретическими оценками скорости остывания белых карликов и непосредственно свидетельствовать об их кристаллизации, мы обсудим его более подробно.

Средняя энергия иона в решетке при температуре T равна¹⁾

$$\bar{\epsilon} = \sum_{\kappa, \lambda} \hbar \omega_{\lambda}(\kappa) \left\{ \frac{1}{\exp[\beta \hbar \omega_{\lambda}(\kappa)] - 1} + \frac{1}{2} \right\}, \quad (4.4.3)$$

где $\beta = 1/kT$. Теплоемкость определяется выражением

$$c_v = \left(\frac{\partial \bar{\epsilon}}{\partial T} \right)_V = k \sum_{\kappa, \lambda} \frac{\exp[\beta \hbar \omega_{\lambda}(\kappa)] [\beta \hbar \omega_{\lambda}(\kappa)]^2}{\{\exp[\beta \hbar \omega_{\lambda}(\kappa)] - 1\}^2}. \quad (4.4.4)$$

Сумму по κ можно заменить интегралом, что дает

$$c_v = \frac{k}{n_i} \int_0^{\kappa_D} \frac{\kappa^2 d\kappa}{2\pi^2} \sum_{\lambda=1}^3 \frac{\exp[\beta \hbar \omega_{\lambda}(\kappa)] [\beta \hbar \omega_{\lambda}(\kappa)]^2}{\{\exp[\beta \hbar \omega_{\lambda}(\kappa)] - 1\}^2}. \quad (4.4.5)$$

«Обычное» дебаевское приближение, которое здесь неприменимо, состоит в следующем²⁾:

¹⁾ Ср., например, с разд. 10.1 книги [479].

²⁾ См., например, [479], разд. 10.2.

1. Предположим, что нормальные моды колебаний в твердом теле можно приближенно представить как распространение звуковых волн в непрерывной упругой среде. Отсюда получим дисперсионное соотношение в виде

$$\omega_{\lambda}(\kappa) = \kappa c_{s, \lambda}, \quad (4.4.6)$$

где скорости поперечных $c_{s, 1} = c_{s, 2}$ и продольных $c_{s, 3}$ звуковых волн можно выразить через параметры упругости среды.

2. Определим «среднюю эффективную» скорость звука c_s :

$$\frac{3}{c_s^3} \equiv \frac{2}{c_{s,1}^3} + \frac{1}{c_{s,3}^3}. \quad (4.4.7)$$

3. Дебаевская граничная частота, отвечающая выражению (4.4.6), должна быть равна

$$\omega_{D, \lambda} = \kappa_D c_{s, \lambda}, \quad (4.4.8)$$

и, следовательно, зависит от поляризации λ . Вместо этого пренебрежем зависимостью от поляризации и определим *общую* дебаевскую частоту для всех λ в виде

$$\omega_D \equiv \kappa_D c_s = (6\pi^2 n_i)^{1/3} c_s, \quad (4.4.9)$$

где было использовано выражение (4.3.12).

Тогда равенство (4.4.5) принимает вид

$$c_v = 3k f_D \left(\frac{\tilde{\theta}_D}{T} \right), \quad (4.4.10)$$

где «функция Дебая» $f_D(y)$ определяется выражением

$$f_D(y) = \frac{3}{y^3} \int_0^y \frac{x^4 e^x dx}{(e^x - 1)^2}, \quad (4.4.11)$$

а «обычная» дебаевская температура $\tilde{\theta}_D$ определена условием

$$k \tilde{\theta}_D = \hbar \omega_D, \quad (4.4.12)$$

которое *отличается* от условия (4.3.17).

Поскольку

$$\begin{aligned} f_D(y) &\rightarrow 1, & y &\rightarrow 0, \\ f_D(y) &\rightarrow \frac{4\pi^4}{5} \frac{1}{y^3}, & y &\rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (4.4.13)$$

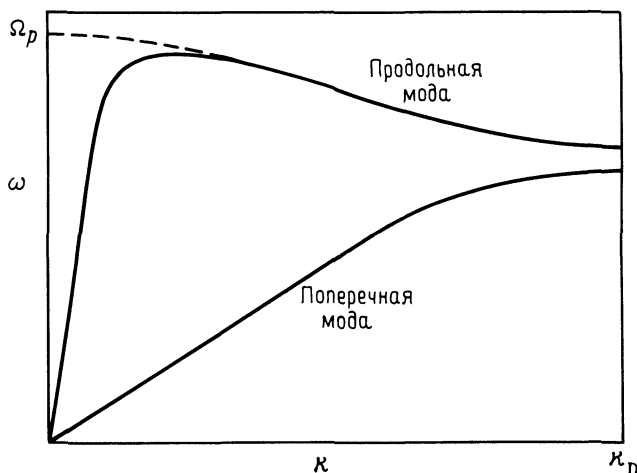


Рис. 4.1. Спектр возбуждений объемноцентрированной кубической решетки с кулоновским взаимодействием при учете экранировки согласно вычислениям Кларка [129] и обзору Пайнса [457]. Штриховая линия отвечает идеализированному случаю отсутствия экранировки. (По работе [401].)

то для «обычной» дебаевской теплоемкости получим

$$c_v \rightarrow 3k, \quad T \gg \tilde{\theta}_D,$$

$$c_v \rightarrow \frac{12\pi^4}{5} k \left(\frac{T}{\tilde{\theta}_D} \right)^3, \quad T \ll \tilde{\theta}_D. \quad (4.4.14)$$

К сожалению, «обычное» дебаевское рассмотрение недостаточно для наших целей. Основанное на грубой аналогии между твердыми телами и упругими средами, оно неправильно описывает кулоновскую природу ионной решетки. Наиболее существенно, что дебаевская граничная частота для ионной решетки равна Ω_p , а не ω_D , так как наивысшая частота в спектре нормальных мод связана с колебаниями *одного* иона вокруг своего положения равновесия.

Правильное вычисление интеграла (4.4.5), определяющего c_v , требует детального анализа спектра нормальных мод (фононов) $\omega_\lambda(\kappa)$ ионной решетки вблизи $T = 0$. Такой анализ был проделан для объемноцентрированной кубической решетки Кларком [129], Карром [107] и другими. Моды колебаний такой решетки состоят из двух поперечных фононов и продольного «плазмона». Их типичный спектр представлен на рис. 4.1.

Некоторые особенности колебательного спектра можно понять на основе анализа нормальных мод одномерной ионной решетки, рассмотренной в

разд. 3.7. Напомним, что мы рассматриваем ионы в виде цепочки из N частиц с массами m_i , которые в положении равновесия находятся на расстоянии $R_0 (= 2r_i)$ друг от друга. Кулоновские силы действуют как «пружинки», связывающие ионы друг с другом, с коэффициентом упругости

$$K = \mu \omega_0^2 = \frac{1}{2} m_i \omega_0^2 = \frac{1}{6} m_i \Omega_p^2, \quad (4.4.15)$$

где $\mu = m_i/2$ — приведенная масса. Полная длина решетки равна $(N + 1)R_0$; предполагается, что крайние ионы закреплены. Мы предположим, что только ближайшие соседи взаимодействуют друг с другом, игнорируя таким образом экранировку, связанную с дальнедействующим характером кулоновского поля¹⁾.

Если смещение j -го иона от положения равновесия равно q_j , то для малых смещений суммарная сила, возвращающая этот ион к положению равновесия, равна

$$F_j = -K(q_j - q_{j-1}) + K(q_{j+1} - q_j). \quad (4.4.16)$$

Уравнение движения имеет вид

$$m_i \ddot{q}_j = K(q_{j-1} - 2q_j + q_{j+1}), \quad j = 1, \dots, N. \quad (4.4.17)$$

Отыскивая нормальные моды, положим

$$q_j(t) = a_j e^{i\omega t}, \quad (4.4.18)$$

где постоянные a_j удовлетворяют уравнению

$$-Ka_{j-1} + (2K - m_i \omega^2)a_j - Ka_{j+1} = 0, \quad j = 1, \dots, N, \quad (4.4.19)$$

причем граничные условия выполняются, если наложить требования:

$$a_0 = 0, \quad (4.4.20)$$

$$a_{N+1} = 0. \quad (4.4.21)$$

Уравнение (4.4.19) является линейным разностным уравнением второго порядка с постоянными, т.е. не зависящими от j , коэффициентами. Его можно решить с помощью подстановки

$$a_j = a_1 e^{i(j\gamma - \delta)}, \quad (4.4.22)$$

где подразумевается, что физический смысл имеет действительная часть a_j . Далее найдем

$$\omega^2 = 4 \frac{K}{m_i} \sin^2 \frac{\gamma}{2}. \quad (4.4.23)$$

¹⁾ Эта экранировка будет учтена ниже в данном разделе.

Граничное условие (4.4.20) требует, чтобы

$$\delta = \frac{\pi}{2}, \quad (4.4.24)$$

так что действительная часть a_0 исчезает, а условие (4.4.21) приводит к соотношению

$$\sin \gamma(N + 1) = 0, \quad (4.4.25)$$

или

$$\gamma_r = \frac{r\pi}{N + 1}, \quad r = 1, \dots, N. \quad (4.4.26)$$

Здесь r нумерует N независимых решений уравнения (4.4.19). Таким образом, имеется N независимых собственных частот:

$$\omega_r = 2 \left(\frac{K}{m_i} \right)^{1/2} \sin \frac{r\pi}{2(N + 1)}. \quad (4.4.27)$$

Для соответствующих нормальных мод смещение j -й частицы пропорционально величине

$$a_{jr} \sim \sin \left(j \frac{r\pi}{N + 1} \right). \quad (4.4.28)$$

Дисперсионное соотношение (4.4.27) можно переписать через волновое число κ_r , определенное равенством

$$\kappa_r = \frac{r\pi}{R_0(N + 1)}. \quad (4.4.29)$$

Тогда

$$a_{jr} \sim \sin(\kappa_r x_j), \quad (4.4.30)$$

где $x_j = j R_0$, а дисперсионное соотношение принимает вид

$$\omega_r = \omega_{\max} \sin \frac{\kappa_r R_0}{2}, \quad (4.4.31)$$

где

$$\omega_{\max} = \left(\frac{2}{3} \right)^{1/2} \Omega_p. \quad (4.4.32)$$

Вышеприведенное дисперсионное соотношение, полученное для продольных мод одномерной решетки, обладает следующими общими для любых систем с большим N свойствами:

1. При низких частотах и больших длинах волн ($\omega_r \ll \omega_{\max}$, $\kappa_r R_0 \ll 1$) линейная акустическая зависимость

$$\omega_r \propto \kappa_r \quad (4.4.33)$$

такая же, как для упругой среды [ср. с формулой (4.4.6)].

2. При высоких частотах и малых длинах волн дисперсионное соотношение уже не является линейным. Частота ω_r достигает максимума вблизи Ω_p , что отвечает волновому числу $\kappa_r \sim \pi/R_0$, т.е. границе «зоны Бриллюэна» решетки.

3. Число независимых мод равно $N \times$ (размерность решетки).

Мы видим, что спектр поперечных фононов, представленный на рис. 4.1 для объемноцентрированной кубической решетки, который приближенно выражается равенством (4.3.13), качественно подобен спектру одномерной решетки, определяемому формулой (4.3.31).

Исходя из результата упражнения 4.2, можно было бы ожидать, что спектр продольных возбуждений в плазме определяется соотношением $\omega_3 \sim \Omega_p$. Это справедливо для высоких частот и коротких длин волн. Однако в низкочастотном длинноволновом пределе плазмон ведет себя как нормальный фонon с $\omega_3 \sim \kappa$, что связано с кулоновской экранировкой ионов окружающим их вырожденным электронным газом.

Чтобы показать это, предположим, что локальная плотность заряда ионов представляет собой малое возмущение однородного нейтрального статического фона. Допустим, что подвижный электронный газ быстро перемещается, чтобы нейтрализовать это возмущение. Запишем

$$\begin{aligned} n_i &= n_0 + n_1, \\ n_e &= Zn_0 + n'_e, \end{aligned} \quad (4.4.34)$$

где n_1 и n'_e — малые отклонения от статических значений n_0 и Zn_0 . Электростатический потенциал, порожденный этим возмущением, определяется уравнением

$$\nabla^2 \phi = -4\pi n_1 Ze + 4\pi e n'_e. \quad (4.4.35)$$

Далее в приближении Томаса—Ферми имеем (разд. 2.4)

$$E_F = \frac{p_F^2(r)}{2m_e} - e\phi(r) = \text{const} \quad (4.4.36)$$

и

$$n_e(r) = \frac{8\pi p_F^3}{3h^3} = \frac{8\pi}{3h^3} (2mE_F)^{3/2} \left(1 + \frac{e\phi(r)}{E_F} \right)^{3/2}. \quad (4.4.37)$$

Разлагая выражение (4.4.37) до первого порядка по $e\phi/E_F$ (фон почти однороден), получим

$$n'_e = \frac{3}{2} \frac{Zen_0\phi}{E_F}. \quad (4.4.38)$$

В итоге уравнение (4.4.35) принимает вид

$$(\nabla^2 - \kappa_{sc}^2)\phi = -4\pi n_1 Ze, \quad (4.4.39)$$

где длина экранирования κ_{sc}^{-1} определена выражением

$$\kappa_{sc}^2 \equiv \frac{6\pi Ze^2 n_0}{E_F}. \quad (4.4.40)$$

Упражнение 4.4. Мотивируйте использование термина «длина экранирования» для κ_{sc}^{-1} , вычислив электростатический потенциал одиночного иона, покоящегося в начале координат, который находится в вырожденной нейтральной плазме.

Указание: ϕ удовлетворяет такому же уравнению, как (4.4.39) с $-4\pi Ze\delta(\mathbf{r})$ в правой части.

Ответ:

$$\phi(r) = Ze \exp(-\kappa_{sc} r)/r.$$

В длинноволновом пределе ионы можно рассматривать как «жидкость». Необходимые нам динамические уравнения, описывающие поведение жидкости¹⁾, это, во-первых, уравнение неразрывности:

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \nabla \cdot (n_i \mathbf{v}) = 0, \quad (4.4.41)$$

и, во-вторых, уравнение движения:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{Ze}{m_i} \nabla \phi. \quad (4.4.42)$$

Линеаризация этих уравнений вблизи статического однородного фона, в котором $\mathbf{v} = \phi = 0$, дает

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + n_0 \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (4.4.43)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{Ze}{m_i} \nabla \phi. \quad (4.4.44)$$

Рассмотрим один фурье-компонент, пропорциональный $\exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\omega t)$. Для него

$$-\omega n_i + n_0 \mathbf{k} \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (4.4.45)$$

$$-\omega \mathbf{v} = -\frac{Ze \mathbf{k} \phi}{m_i}, \quad (4.4.46)$$

$$(\kappa^2 + \kappa_{sc}^2)\phi = 4\pi n_1 Ze, \quad (4.4.47)$$

¹⁾ См. гл. 6.

где последнее уравнение следует из уравнения (4.4.39). Умножим скалярно уравнение (4.4.46) на κ и исключим $\kappa \cdot \mathbf{v}$ из уравнения (4.4.45). Далее с помощью уравнения (4.4.47) исключим ϕ . В результате получим

$$\omega^2 = \frac{\Omega_p^2}{1 + \kappa_{sc}^2/\kappa^2} \quad (\text{продольная}) \quad , \quad (4.4.48)$$

где

$$\Omega_p^2 = \frac{4\pi Z^2 e^2 n_0}{m_i} . \quad (4.4.49)$$

Заметим, что это относится только к *продольной* моде, так как, согласно (4.4.46), векторы \mathbf{v} и κ параллельны. Из выражения (4.4.48) видно, что $\omega \sim \kappa$ при малых κ и $\omega \rightarrow \Omega_p$ при больших κ .

Экранировка не оказывает значительного влияния на поперечные моды.

Упражнение 4.5. Покажите, что в низкочастотном пределе формула (4.4.48) сводится к акустическому дисперсионному соотношению: $\omega \rightarrow c_s \kappa$, где $c_s^2 = dP/d\rho$, P и ρ определяются выражениями, отвечающими случаю идеального ферми-газа.

Теперь мы готовы вычислить c_v с помощью формулы (4.4.5), используя спектр возбуждений объемноцентрированной кубической решетки, представленный на рис. 4.1. В общем случае вычисления приходится делать численно. Однако можно легко найти вид c_v в двух предельных случаях. В режиме высокотемпературной решетки имеем

$$c_v \rightarrow 3k, \quad \theta_D \ll T \ll T_g, \quad (4.4.50)$$

независимо от деталей дисперсионного соотношения и в согласии с предыдущим рассмотрением.

В низкотемпературном режиме, $T \ll \theta_D$, главный вклад в интеграл (4.4.5) дает низкочастотная, длинноволновая область. Приближенно записав

$$\omega_\lambda \approx \alpha_\lambda \frac{\kappa}{\kappa_D} \Omega_p, \quad (4.4.51)$$

где α_λ — постоянная (ср. с рис. 4.1), получим

$$c_v \approx 2k f_D(y_1) + k f_D(y_3), \quad (4.4.52)$$

где

$$y_1 = y_2 = \frac{\alpha_1 \theta_D}{T}, \quad y_3 = \frac{\alpha_3 \theta_D}{T}. \quad (4.4.53)$$

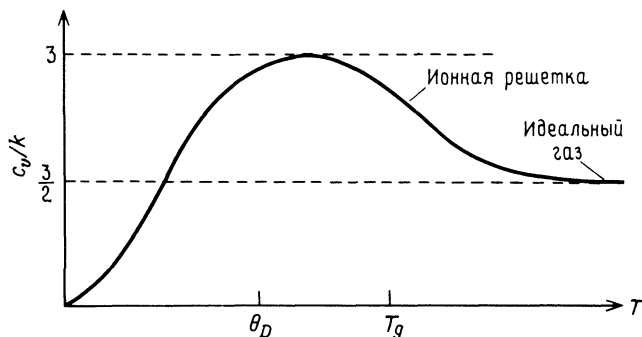


Рис. 4.2. Удельная теплоемкость как функция температуры (рисунок схематический; учтен лишь вклад ионов). При низких температурах $\theta_D < T < T_g$, когда газ кристаллизуется, колебания решетки увеличивают c_v по сравнению со значением $3k/2$ для идеального газа Максвелла — Больцмана. При очень низких температурах, $T < \theta_D$, c_v ведет себя как T^3 .

В пределе $T \rightarrow 0$, $y \rightarrow \infty$ с помощью выражения (4.4.13) получим

$$c_v \approx \frac{4\pi^4}{5} \left(\frac{T}{\theta_D} \right)^3 k \left(\frac{2}{\alpha_1^3} + \frac{1}{\alpha_3^3} \right).$$

На рис. 4.1 видно, что при малых κ имеем $\alpha_1 \approx 0,8$; $\alpha_3 \gg 1$. Следовательно, продольные моды не вносят никакого вклада и

$$c_v \approx \frac{16\pi^4}{5} \left(\frac{T}{\theta_D} \right)^3 k, \quad T \ll \theta_D. \quad (4.4.54)$$

Ионная теплоемкость при всех T показана на рис. 4.2.

4.5. УТОЧНЕННЫЙ АНАЛИЗ ОСТЫВАНИЯ БЕЛЫХ КАРЛИКОВ

В общем случае уравнение (4.2.5), описывающее остывание белых карликов, принимает вид

$$-\frac{d}{dt} \int c_v dT = CA m_u T^{7/2}, \quad (4.5.1)$$

или

$$\frac{dt}{dT} = - \frac{c_v}{CA m_u T^{7/2}}. \quad (4.5.2)$$

Если $\theta_D \ll T \ll T_g$, то $c_v \approx 3k$ и из уравнения (4.5.2) для времени остывания следует

$$\tau = \frac{6}{5} \frac{kTM}{A m_u L}, \quad \theta_D \ll T \ll T_g. \quad (4.5.3)$$