



Рис. 4.2. Удельная теплоемкость как функция температуры (рисунок схематический; учтен лишь вклад ионов). При низких температурах $\theta_D < T < T_g$, когда газ кристаллизуется, колебания решетки увеличивают c_v по сравнению со значением $3k/2$ для идеального газа Максвелла — Больцмана. При очень низких температурах, $T < \theta_D$, c_v ведет себя как T^3 .

В пределе $T \rightarrow 0$, $y \rightarrow \infty$ с помощью выражения (4.4.13) получим

$$c_v \approx \frac{4\pi^4}{5} \left(\frac{T}{\theta_D} \right)^3 k \left(\frac{2}{\alpha_1^3} + \frac{1}{\alpha_3^3} \right).$$

На рис. 4.1 видно, что при малых κ имеем $\alpha_1 \approx 0,8$; $\alpha_3 \gg 1$. Следовательно, продольные моды не вносят никакого вклада и

$$c_v \approx \frac{16\pi^4}{5} \left(\frac{T}{\theta_D} \right)^3 k, \quad T \ll \theta_D. \quad (4.4.54)$$

Ионная теплоемкость при всех T показана на рис. 4.2.

4.5. УТОЧНЕННЫЙ АНАЛИЗ ОСТЫВАНИЯ БЕЛЫХ КАРЛИКОВ

В общем случае уравнение (4.2.5), описывающее остывание белых карликов, принимает вид

$$-\frac{d}{dt} \int c_v dT = CA m_u T^{7/2}, \quad (4.5.1)$$

или

$$\frac{dt}{dT} = - \frac{c_v}{CA m_u T^{7/2}}. \quad (4.5.2)$$

Если $\theta_D \ll T \ll T_g$, то $c_v \approx 3k$ и из уравнения (4.5.2) для времени остывания следует

$$\tau = \frac{6}{5} \frac{kTM}{A m_u L}, \quad \theta_D \ll T \ll T_g. \quad (4.5.3)$$

Этот результат в два раза выше определяемого уравнением (4.2.7) из-за учета потенциальной энергии решетки.

При $T \ll \theta_D$ подставим в уравнение (4.5.2) выражение (4.4.54) и в результате получим

$$\tau = \frac{32\pi^4}{5} \left(\frac{T}{\theta_D} \right)^3 \left[\left(\frac{T_0}{T} \right)^{1/2} - 1 \right] \frac{MkT}{Am_u L}, \quad T \ll \theta_D, \quad (4.5.4)$$

где T_0 — начальная температура, с которой началось остывание, $T_0 \leq \theta_D$. Как впервые было указано Местелом и Рудерманом [401], полученное время остывания короче, чем следует из классического результата (4.5.3), если T меньше примерно $0,1 \theta_D$. Высказывалась надежда, что этим можно объяснить противоречие между теорией и наблюдениями, о котором шла речь в разд. 4.2.

Упражнение 4.6. а) Оцените T_c и L_c , при которых происходит переход от «классического» режима остывания к дебаевскому для белого карлика с массой $1 M_\odot$ с углеродным ядром и со следующим составом атмосферы: $X = 0$, $Y = 0,9$ и $Z = 0,1$. Получите приближенный критерий перехода, приравняв выражение (4.4.54) $3k$. Определите соответствующую плотность с помощью рис. 3.2.

б) Оцените τ_c — время, за которое белый карлик достигнет этого перехода.

Ответы: $T_c \sim 4,8 \cdot 10^6$ К, $L_c \sim 1,3 \cdot 10^{-4} L_\odot$, $\tau_c \sim 5 \cdot 10^9$ лет.

Упражнение 4.7. Используя формулу (4.5.3) и аналитические выражения, полученные в разд. 4.1 и гл. 3, оцените зависимость τ и L_c от M для звезд с заданным химическим составом.

Ответы: $\tau \sim M^{-2,5}$, $L_c \sim M^{4,5}$. В зависимости от сделанных предположений возможны и другие ответы.

В проведенном выше аналитическом рассмотрении мы опустили в левой части уравнения (4.5.1) скрытую теплоту кристаллизации $-q \approx kT$. Лэмб и Ван Хорн [331] учли этот эффект в своем детальном расчете остывания белого карлика, состоящего из чистого ^{12}C , с массой, равной $1 M_\odot$. Это привело к увеличению классического времени остывания на множитель $\sim 1,6$ в дополнение к множителю 2, связанному с потенциальной энергией ионов. Причина этого увеличения состоит в том, что энерговыделение за счет кристаллизации равно

$$\frac{\delta E_{\text{скрыт. тепл}}}{E_{\text{тепл}}} \sim \frac{-q}{3kT/2} \sim \frac{2}{3}, \quad (4.5.5)$$

так что в целом

$$\frac{\delta\tau_{\text{реш}} + \delta\tau_q}{\tau_{\text{класс}}} \sim \frac{5}{3} \Rightarrow \frac{\tau}{\tau_{\text{класс}}} \sim 3. \quad (4.5.6)$$

Однако, поскольку кристаллизация начинается в центре звезды и по мере ее охлаждения постепенно распространяется к наружным слоям, вклад q в энерговыделение не приводит к возникновению пика в функции светимости. Этот вклад не приводит к следствиям, явно свидетельствующим о кристаллизации и не объясняет резкого убывания функции светимости.

В правой части уравнения (4.5.1) мы также опустили член, связанный с излучением нейтрино. Тепловое излучение нейтрино¹⁾ превосходит излучение фотонов, когда фотонная светимость $L \geq 10^{-0,5} L_{\odot}$, а температура $T \geq 10^{7,8}$ К. Добавление L_{ν} в левую часть уравнения (4.5.1) вызовет уменьшение времени остывания и соответствующее падение теоретической функции светимости выше $\lg(L/L_{\odot}) = -0,5$ по сравнению с кривой остывания Местела. Такое падение заметно на кривой Лэмба и Ван Хорна, приведенной на рис. 4.3, которая более подробно обсуждается ниже.

Наконец, конвекция может привести к более эффективному переносу энергии и уменьшению времени остывания. Однако тщательный анализ, проделанный Фонтеном и Ван Хорном [199], а также Лэмбом и Ван Хорном [331], указывает, что в первом приближении конвекция, по всей видимости, незначительна.

Детальные расчеты охлаждения были выполнены также Суини [554], а также Шавивом и Ковецем [535]. Результат Шавива и Ковца для звезды с массой $0,6 M_{\odot}$ часто цитируется, так как существует мнение, что средняя масса белых карликов, найденная по радиусу, близка к этому значению²⁾. Результаты упр. 4.7 показывают, что дебаевское охлаждение для звезды с массой $0,6 M_{\odot}$ начинается при столь низкой светимости, что оно не влияет на функцию светимости в интересующем нас диапазоне, доступном наблюдениям, нижняя граница которого в настоящее время опустилась до $\sim 10^{-5} L_{\odot}$. Таким образом, результаты Шавива и Ковца гораздо ближе к первоначальной кривой охлаждения Местела, чем результаты Лэмба и Ван Хорна.

4.6. СРАВНЕНИЕ С НАБЛЮДЕНИЯМИ

Детальное сравнение теории с наблюдениями можно делать двумя способами: либо рассматривая функцию светимости белых карликов, либо оценивая возраст белых карликов в звездных скоплениях. В принципе оба способа позволяют выяснить, насколько хорошо мы понимаем твердотельные свойства самогравитирующих астрономических объектов.

а) Сравнение с возрастом скоплений

Используя данные о светимости белых карликов в звездных скоплениях, Лэмб и Ван Хорн [331] теоретически оценили их возраст, полагая, что все

¹⁾ Процессы теплового излучения нейтрино описаны в разд. 18.

²⁾ См., например, работу [317].