Глава 5

Общая теория относительности

Те изменения гравитационного поля, которые вносятся общей теорией относительности, оказываются весьма важными как в задачах об устойчивости белых карликов, так и в задачах о равновесии и стабильности нейтронных звезд и черных дыр. Это обстоятельство и вызывает столь большой теоретический интерес к компактным объектам, наделяя эти объекты удивительными и неповторимыми свойствами. Хотя последовательное детальное обсуждение общей теории относительности выходит за рамки этой книги, нам все же нужно остановиться кратко на основных идеях и уравнениях этой теории. Такого краткого изложения будет вполне достаточно для приложений, обсуждаемых в следующих главах. Но читатель не должен огорчаться, если ему не удастся сразу усвоить новые для него понятия, которые он может здесь встретить. Недоумения проясняются при рассмотрении приложений. Интересующийся же читатель может продолжить изучение общей теории относительности, выбрав одну или несколько из существующих прекрасных книг на эту тему[1]. Для начала будет достаточно, если читатель познакомится с идеями и основными уравнениями, отличающими общую теорию относительности от теории Ньютона. Это дает нам право использовать теорию относительности в следующих главах, когда это станет необходимым.

5.1. ЧТО ТАКОЕ ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ?

Общая теория относительности является релятивистской теорией гравитации. Чтобы понять это немного лучше, зададим себе вопрос: какие могут возникнуть трудности при попытке сделать релятивистской теорию гравитации Ньютона?

Ньютоновскую теорию гравитации можно представить как теорию скалярного поля Φ, удовлетворяющего уравнению Пуассона:

$$\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho_0. \tag{5.1.1}$$

Гравитационное ускорение любого объекта в этом поле равно $-\nabla\Phi$.

---

[1] Например, по книгам Мизнера, Торна и Уилера [411], Вейнберга [606] или, как введение, Ландау и Лифшица [341].

Согласно теории относительности, энергия в любой форме эквивалентна массе, так что в релятивистской теории гравитации источник гравитационного поля определяется не только ρ_0, но и плотностью энергии. В частности, плотность энергии гравитационного поля в ньютоновском пределе сама пропорциональна $(\nabla\Phi)^2$. Если внести этот член в левую часть уравнения (5.1.1), то мы должны получить *нелинейное* дифференциальное уравнение, описывающее гравитационное поле в релятивистской теории. Символически можно написать

$$F(g) \sim GT, \tag{5.1.2}$$

где g представляет собой гравитационное поле или поля, которые сводятся к Φ в пределе слабого поля; F — нелинейный дифференциальный оператор, сводящийся к ∇^2 в том же пределе, а T — некоторая величина, описывающая все *негравитационные* формы энергии. При этом в нерелятивистском пределе основным остается вклад от ρ_0.

Великая идея Эйнштейна состояла в том, что он построил общую теорию относительности как *геометрическую* теорию гравитации. Мы не будем здесь говорить об основании этой идеи, а начнем с описания геометрии специальной теории относительности.

В специальной теории относительности *пространство-время* является сценой, на которой разыгрываются физические явления. Пространство-время состоит из событий, для описания которых необходимо задать четыре числа: из них три числа определяют пространственное расположение события относительно некоторой выбранной координатной системы и одно число определяет время. Геометрически пространство-время представляет собой четырехмерное многообразие. Каждая точка в этом многообразии отвечает событию в пространстве-времени.

Наблюдатель делает измерения в пространстве-времени, т.е. сопоставляет координаты событиям. Таким образом, наблюдателю в пространстве-времени соответствует некоторый выбор координат на многообразии. В специальной теории относительности существует выделенное семейство наблюдателей — это инерциальные наблюдатели, для которых свободная частица движется с постоянной скоростью. Все инерциальные наблюдатели связаны преобразованиями Лоренца. Координатная система инерциального наблюдателя называется *инерциальной координатной системой,* или *лоренцевой системой*.

Интервал (расстояние) между двумя близко расположенными событиями в пространстве-времени задается выражением

$$ds^2 = -c^2\,dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2, \tag{5.1.3}$$

где dt, dx, dy, dz — разности координат событий, вычисленные в любой лоренцевой системе. Интервал ds не зависит от того, в какой инерциальной системе он вычисляется, — это *лоренц-инвариант.* Записав $x^0 = ct$, $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$, можно переписать равенство (5.3.1) в виде

$$ds^2 = \eta_{\alpha\beta}\,dx^\alpha\,dx^\beta, \tag{5.1.4}$$

где $\eta_{\alpha\beta}$ — диагональная матрица 4 × 4:

$$\eta_{\alpha\beta} = \mathrm{diag}(-1, 1, 1, 1). \tag{5.1.5}$$

По повторяющимся индексам в выражении (5.1.4) производится суммирование от 0 до 3. Матрица $\eta_{\alpha\beta}$ в специальной теории относительности называется *метрическим тензором* пространства-времени; последний описывает геометрически все свойства пространства-времени. Таким образом, пространство-время является псевдоевклидовым метрическим пространством, от евклидова пространства оно отличается знаком минус в равенстве (5.1.5), и его называют *пространством Минковского*.

Для описания пространства-времени можно было бы пользоваться нелоренцевыми (неинерциальными) координатными системами. Например, для пространственной части метрики можно было бы взять полярные координаты или же использовать координатную систему, связанную с ускоренным наблюдателем. Если соотношение между инерциальными координатами x^α и неинерциальными координатами y^α имеет вид

$$x^\alpha = x^\alpha(y^\gamma), \tag{5.1.6}$$

то выражение (5.1.4) переходит в

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}(y^\gamma)\, dy^\alpha\, dy^\beta, \tag{5.1.7}$$

где по обычным правилам дифференцирования

$$g_{\alpha\beta}(y^\gamma) = \frac{\partial x^\lambda}{\partial y^\alpha}\frac{\partial x^\sigma}{\partial y^\beta}\eta_{\lambda\sigma}. \tag{5.1.8}$$

Метрика в форме (5.1.7) может выглядеть весьма сложной, так как ее коэффициенты могут быть недиагональными и зависеть от координат. Однако и в этом случае пространство все же остается плоским, поскольку существует преобразование координат [обратное преобразованию (5.1.6)], приводящее метрику к псевдоевклидовой форме (5.1.5) во всем пространстве.

В общей теории относительности пространство-время по-прежнему является четырехмерным многообразием, но теперь интервал между ближайшими событиями определяется выражением

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}(x^\gamma)\, dx^\alpha\, dx^\beta. \tag{5.1.9}$$

Если *никаким* выбором координат нельзя свести метрику к форме (5.1.5) во всех точках, то пространство-время искривлено. Гравитационное поле выражают через функции $g_{\alpha\beta}$; иными словами, гравитационное поле определяет геометрию. Интервал ds по-прежнему является инвариантом, так что при переходе от координат $\bar{x}^\alpha$ к координатам x^α компоненты метрического тензора $g_{\alpha\beta}$ преобразуются по закону

$$g_{\alpha\beta} = \frac{\partial \bar{x}^\lambda}{\partial x^\alpha}\frac{\partial \bar{x}^\sigma}{\partial x^\beta}\bar{g}_{\lambda\sigma}. \tag{5.1.10}$$

Как и в специальной теории относительности, величина ds, вычисленная вдоль мировой линии частицы, измеряет собственное время $d\tau$ вдоль этой линии: $ds^2 = -c^2 d\tau^2$.

Метрика позволяет определить скалярное произведение векторов. Выражение (5.1.9) можно переписать как

$$ds^2 = d\vec{\mathbf{x}} \cdot d\vec{\mathbf{x}}, \tag{5.1.11}$$

где $d\vec{\mathbf{x}}$ — вектор бесконечно малого смещения с компонентами dx^α. В общем случае скалярное произведение двух векторов $\vec{\mathbf{A}}$ и $\vec{\mathbf{B}}$ с компонентами A^α и B^α равно

$$\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{B}} \equiv g_{\alpha\beta} A^\alpha B^\beta. \tag{5.1.12}$$

Такие векторы с четырьмя компонентами называются 4-векторы; чтобы отличить их от трехмерных векторов, будем обозначать их буквами со стрелкой сверху. Иногда мы будем записывать[1)]

$$A_\alpha \equiv g_{\alpha\beta} A^\beta \tag{5.1.13}$$

или

$$A^\alpha = g^{\alpha\beta} A_\beta \tag{5.1.14}$$

где $\|g^{\alpha\beta}\|$ — матрица, обратная матрице $\|g_{\alpha\beta}\|$.

Тогда

$$\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{B}} = A_\alpha B^\alpha = A^\alpha B_\alpha = A_\alpha B_\beta g^{\alpha\beta}. \tag{5.1.15}$$

В специальной теории относительности координаты всегда отвечают результатам какого-то физического измерения. Даже для неинерциальных координат можно найти интерпретацию, определив их соотношение с инерциальной координатной системой, в которой t, x, y и z обычным образом связаны с измерениями, выполненными с помощью идеальных часов и стержней. В общей теории относительности, вообще говоря, не существует выделенных (предпочтительных) координатных систем; в принципе здесь приемлем любой набор координат, которые гладко нумеруют все события в пространстве-времени. (Разумеется, в одних случаях выбор может быть более удобным, чем в других.)[2)] В силу этого нам следует поближе рассмотреть вопрос о физических измерениях.

[1)] Мы не будем использовать геометрическую интерпретацию A^α как контравариантных компонент вектора (т.е. базисных векторов, касательных к координатным линиям) и A_α как ковариантных компонент (т.е. базисных векторов, ортогональных координатным поверхностям). Нам также не понадобится явное введение дифференциальных форм.

[2)] Заметим, что общая теория относительности не запрещает существования предпочтительных координатных систем, если в задаче имеется какая-то симметрия. Например, в простой космологии «горячей» Вселенной выделена система, в которой микроволновое фоновое излучение изотропно. Однако, во-первых, гравитационное поле в общем случае не имеет никаких симметрий, во-вторых, даже если симметрии имеются, глобальных инерциальных систем в присутствии гравитационного поля не

Физическая интерпретация общей теории относительности опирается на понятие локальной инерциальной системы. Хотя в общем случае $g_{\alpha\beta}$ в формуле (5.1.9) никаким преобразованием координат нельзя привести к $\eta_{\alpha\beta}$ во всех точках пространства-времени, однако любое событие в пространстве-времени можно выбрать за начало координат и затем в этой точке диагонализовать $g_{\alpha\beta}$ (в фиксированной точке это просто вещественная симметричная матрица). Можно продвинуться даже дальше, найдя преобразование координат, в результате которого первые производные $g_{\alpha\beta}$ в начале координат обращаются в нуль. Другими словами, разложение метрики в ряд Тейлора вокруг выбранного начала координат приобретает в этом случае вид

$$ds^2 = \left[\eta_{\alpha\beta} + \mathcal{O}\left(|x|^2\right)\right] dx^\alpha dx^\beta. \tag{5.1.16}$$

(Читатель может убедиться в правдоподобности данного утверждения, подсчитав число степеней свободы при преобразовании координат. Строгое доказательство его справедливости можно найти в стандартных учебниках по общей теории относительности.) Любая малая координатная окрестность, в которой метрика имеет форму (5.1.16), называется локально инерциальной системой.

Чтобы понять, почему она так называется, рассмотрим в пространстве-времени локально инерциальную систему какого-нибудь наблюдателя. Представим наблюдателя мировой линией всех событий, которые он пересекает. Выберем какое-либо событие на этой мировой линии в качестве начала координат, используемых в равенстве (5.1.16). Направим единичный 4-вектор $\vec{\mathbf{e}}_{\hat{t}}$ по касательной к координатной линии t. Аналогично построим $\vec{\mathbf{e}}_{\hat{x}}$, $\vec{\mathbf{e}}_{\hat{y}}$ и $\vec{\mathbf{e}}_{\hat{z}}$. Поскольку $g_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} = \eta_{\alpha\beta}$, эти векторы образуют *ортонормальную тетраду*, т.е. $\vec{\mathbf{e}}_{\hat{t}} \cdot \vec{\mathbf{e}}_{\hat{t}} = -1$, $\vec{\mathbf{e}}_{\hat{x}} \cdot \vec{\mathbf{e}}_{\hat{x}} = 1$, $\vec{\mathbf{e}}_{\hat{t}} \cdot \vec{\mathbf{e}}_{\hat{x}} = 0$ и т. д. Для обозначения ортонормальных тетрад мы используем «крышки». Вплоть до членов первого порядка по $|x|$ геометрия оказывается *такой же*, как в специальной теории относительности. Наблюдатель может производить измерения точно так же, как в специальной теории относительности, при условии, что протяженность его измерительного устройства как в пространстве, так и во времени достаточно мала. Отклонения от специальной теории относительности определяется масштабом, задаваемым вторыми производными $g_{\alpha\beta}$, — чем сильнее гравитационное поле, тем больше искривлено пространство и тем меньше этот масштаб.

Наблюдатель, связанный с локально ортонормальной тетрадой, как описано выше, называется *локально инерциальным*, или *локально лоренцевым наблюдателем*[1]. Общая теория относительности идет дальше просто-

---

[1] Любой наблюдатель может построить ортонормальную тетраду, удовлетворяющую условию $g_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} = \vec{\mathbf{e}}_{\hat{\alpha}} \cdot \vec{\mathbf{e}}_{\hat{\beta}} = \eta_{\alpha\beta}$ в произвольной точке пространства-времени. Однако только в специальном случае локально инерциального наблюдателя (свободно падающий наблюдатель, движущийся с нулевым ускорением и без вращения) метрика удовлетворяет условию (5.1.16) с точностью до $\mathcal{O}|x|^2$, т.е. справедливо равенство $g_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} = 0$.

го условия, что измерения в локально инерциальной системе проводятся так же, как в специальной теории относительности. Сверх того, она утверждает, что все негравитационные законы физики в локально инерциальной системе такие же, как в специальной теории относительности. Это утверждение называется *принципом эквивалентности*. В его основе лежит идея эквивалентности гравитационной и инертной масс, продемонстрированная Эйнштейном в его знаменитом мысленном эксперименте с лифтом. Если рассмотреть наблюдателя, который ставит какие-то опыты в закрытом помещении, движущемся вверх с постоянным ускорением, его экспериментальные результаты должны быть неотличимы от результатов, полученных наблюдателем внутри покоящейся лаборатории, находящейся в однородном гравитационном поле. Напротив, в системе, которая свободно падает в однородном гравитационном поле, не должно наблюдаться эффектов, связанных с этим полем. (Вспомните изображения космонавтов на спутнике, движущемся по орбите вокруг Земли.)[1]

Последний пример дает физическое описание локально инерциальной системы — это система, связанная с наблюдателем, который свободно падает в гравитационном поле. Реальные гравитационные поля, разумеется, не являются однородными, и эта неоднородность нарушает инерциальные свойства любой системы, потенциально являющейся глобально инерциальной. Однако чем более «локальной» является система, тем ближе она к инерциальной.

Упражнение 5.1. Рассмотрим две частицы с равными массами m, находящиеся на одной вертикальной линии на расстояниях r и $r + h$ $(h \ll r)$ от центра Земли. В момент $t = 0$ эти ранее покоившиеся частицы начинают свободно падать к поверхности Земли. Покажите, что наблюдатель, падающий вместе с одной из частиц, увидит, что расстояние между частицами постепенно возрастает. Сформулируйте это как количественное утверждение относительно локально инерциальной системы, связанной с наблюдателем. В частности, найдите время, по прошествии которого станут заметными эффекты кривизны пространства-времени, если точность измерений составляет $\Delta h_{\min}$.

Принцип эквивалентности является обобщением утверждения, согласно которому *законы механики* не позволяют локально обнаруживать гравитационное поле, на утверждение, что *никакие законы физики* не позволяют этого сделать. Эффекты гравитации всегда исчезают в свободно падающей (т. е. локально инерциальной) системе отсчета.

---

[1] Следует учитывать, что сказанное верно только для локальных законов, таких, как законы динамики Ньютона. Однако, например, для силы Кориолиса, эффектов, связанных с электромагнитным излучением, и других подобных эффектов, определяемых полями в конечных областях пространства, такое утверждение, очевидно, не справедливо. — *Прим. ред.*

Принцип эквивалентности говорит нам, как нужно формулировать негравитационные законы физики в присутствии гравитационного поля. Начнем с любого закона теории относительности, например с закона сохранения энергии-импульса:

$$\nabla_\alpha T^{\alpha\beta} = 0, \tag{5.1.17}$$

$$\nabla_\alpha \equiv \frac{\partial}{\partial x^\alpha}. \tag{5.1.18}$$

Здесь $T^{\alpha\beta}$ — тензор энергии-импульса. Как показывает уравнение (5.1.17), его 4-дивергенция равна нулю. Согласно принципу эквивалентности, равенство (5.1.17) должно быть справедливо в любой локально инерциальной системе, где метрика имеет вид (5.1.16). Мы хотим теперь переписать выражение (5.1.17) в форме, которая справедлива в произвольной системе координат с метрикой (5.1.9). Раздел математики, который занимается этими вопросами, называется тензорным исчислением (или дифференциальной геометрией). В данной книге нам не понадобится развивать этот формализм. Достаточно только сказать, что нужно определить более общий, чем (5.1.18), оператор дифференцирования (ковариантную производную). Как известно читателю, даже в плоском пространстве в правой части выражения (5.1.18) при дифференцировании векторов в криволинейных координатах появляются дополнительные члены. Например, если в сферической системе координат вектор имеет компоненты

$$\mathbf{A} = A^r\mathbf{e}_r + A^\theta\mathbf{e}_\theta + A^\phi\mathbf{e}_\phi, \tag{5.1.19}$$

его дивергенция не будет просто равна

$$\partial_r A^r + \partial_\theta A^\theta + \partial_\phi A^\phi. \tag{5.1.20}$$

При вычислении дивергенции возникают слагаемые, связанные с производными от $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\theta$, $\mathbf{e}_\phi$. Эти базисные векторы не постоянны в пространстве, как видно из того обстоятельства, что в указанной координатной системе компоненты $g_{\alpha\beta}$ не постоянны.

Аналогично в искривленном пространстве в ковариантной производной ∇_α появляются дополнительные члены, связанные с непостоянством $g_{\alpha\beta}$. Однако здесь эти члены нельзя устранить сразу во всем пространстве никаким преобразованием координат, так что производные $g_{\alpha\beta}$ описывают эффекты гравитационного поля.

Это математическое выражение принципа эквивалентности иногда называют принципом общей ковариантности: требуется, чтобы ковариантные уравнения специальной теории относительности оставались ковариантными не только при преобразованиях Лоренца, но и при общих преобразованиях координат.

В общей теории относительности нет аналога ньютоновскому понятию «гравитационного ускорения в данной точке». Такое локальное ускорение устраняется переходом в свободно падающую систему координат. Однако разность ускорений двух близко расположенных пробных тел устранить, вообще говоря, не удается (ср. с упр. 5.1). Таким образом, истинное гравитационное поле в общей теории относительности аналогично ньютоновскому полю *приливных* сил $\partial^2\Phi/\partial x^i dx^j$, где Φ — ньютоновский потенциал. Объясняется это тем, что ньютоновское относительное ускорение двух пробных тел равно

$$a^i{}_{\text{отн}} = a^i(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}) - a^i(\mathbf{x})$$

$$= \Delta x^j \frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x^i}\right). \tag{5.1.21}$$

До сих пор мы обсуждали, как гравитация влияет на другие физические явления и как геометрия связана с физическими измерениями в локально инерциальной системе. Чтобы завершить картину, нужно, пользуясь уравнением вида (5.1.2), понять, каким образом распределение массы-энергии определяет геометрию $g_{\alpha\beta}$. Хотя мы и не будем явно использовать это уравнение в его общем виде, тем не менее выпишем его, так как оно представляет собой вершину эйнштейновской теории:

$$G^{\alpha\beta} = 8\pi\frac{G}{c^4}T^{\alpha\beta}. \tag{5.1.22}$$

Здесь $G^{\alpha\beta}$ — тензор Эйнштейна, т. е. нелинейный дифференциальный оператор второго порядка, действующий на $g_{\alpha\beta}$. В качестве источника в уравнении Эйнштейна стоит тензор энергии-импульса материи (без гравитационной части). Это сложное уравнение сводится к уравнению Пуассона (5.1.1) в ньютоновском пределе. Оно также гарантирует сохранение энергии-импульса [ср. с равенством (5.1.17)], так как $\nabla_\alpha G^{\alpha\beta} = 0$.

5.2. ДВИЖЕНИЕ ПРОБНЫХ ЧАСТИЦ

Пробная частица представляет собой идеализацию материального объекта. Предполагается, что она мала (не возмущает пространство-время вокруг себя), не заряжена (не взаимодействует с электромагнитным полем), сферически-симметрична (отсутствуют моменты сил вращения) и т. п. Она просто свободно движется в гравитационном поле. В специальной теории относительности (в отсутствие гравитационного поля) пробные частицы движутся с постоянной скоростью. Уравнение их движения можно получить из вариационного принципа, находя экстремум расстояния (интервала) вдоль мировой линии:

$$\delta\int ds = 0. \tag{5.2.1}$$