В общей теории относительности нет аналога ньютоновскому понятию «гравитационного ускорения в данной точке». Такое локальное ускорение устраняется переходом в свободно падающую систему координат. Однако разность ускорений двух близко расположенных пробных тел устранить, вообще говоря, не удается (ср. с упр. 5.1). Таким образом, истинное гравитационное поле в общей теории относительности аналогично ньютоновскому полю *приливных* сил $\partial^2\Phi/\partial x^i dx^j$, где Φ — ньютоновский потенциал. Объясняется это тем, что ньютоновское относительное ускорение двух пробных тел равно

$$a^i{}_{\text{отн}} = a^i(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}) - a^i(\mathbf{x})$$

$$= \Delta x^j \frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x^i}\right). \tag{5.1.21}$$

До сих пор мы обсуждали, как гравитация влияет на другие физические явления и как геометрия связана с физическими измерениями в локально инерциальной системе. Чтобы завершить картину, нужно, пользуясь уравнением вида (5.1.2), понять, каким образом распределение массы-энергии определяет геометрию $g_{\alpha\beta}$. Хотя мы и не будем явно использовать это уравнение в его общем виде, тем не менее выпишем его, так как оно представляет собой вершину эйнштейновской теории:

$$G^{\alpha\beta} = 8\pi\frac{G}{c^4}T^{\alpha\beta}. \tag{5.1.22}$$

Здесь $G^{\alpha\beta}$ — тензор Эйнштейна, т. е. нелинейный дифференциальный оператор второго порядка, действующий на $g_{\alpha\beta}$. В качестве источника в уравнении Эйнштейна стоит тензор энергии-импульса материи (без гравитационной части). Это сложное уравнение сводится к уравнению Пуассона (5.1.1) в ньютоновском пределе. Оно также гарантирует сохранение энергии-импульса [ср. с равенством (5.1.17)], так как $\nabla_\alpha G^{\alpha\beta} = 0$.

5.2. ДВИЖЕНИЕ ПРОБНЫХ ЧАСТИЦ

Пробная частица представляет собой идеализацию материального объекта. Предполагается, что она мала (не возмущает пространство-время вокруг себя), не заряжена (не взаимодействует с электромагнитным полем), сферически-симметрична (отсутствуют моменты сил вращения) и т. п. Она просто свободно движется в гравитационном поле. В специальной теории относительности (в отсутствие гравитационного поля) пробные частицы движутся с постоянной скоростью. Уравнение их движения можно получить из вариационного принципа, находя экстремум расстояния (интервала) вдоль мировой линии:

$$\delta\int ds = 0. \tag{5.2.1}$$

Чтобы убедиться в этом, перепишем подынтегральное выражение в форме

$$ds = \left(-\eta_{\alpha\beta}\dot{x}^{\alpha}\dot{x}^{\beta}\right)^{1/2} d\lambda, \tag{5.2.2}$$

где

$$\dot{x}^{\alpha} \equiv \frac{dx^{\alpha}}{d\lambda}. \tag{5.2.3}$$

Здесь λ — любой параметр вдоль мировой линии. Выражение (5.2.2) для ds инвариантно при замене параметра $\lambda \to \lambda(\lambda')$. Лагранжиан для выражения (5.2.1) равен

$$L = \left(-\eta_{\alpha\beta}\dot{x}^{\alpha}\dot{x}^{\beta}\right)^{1/2}. \tag{5.2.4}$$

Уравнения движения Эйлера—Лагранжа, получаемые из выражения (5.2.1), имеют вид

$$\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^{\alpha}}\right) = \frac{\partial L}{\partial x^{\alpha}}. \tag{5.2.5}$$

Правая часть здесь равна нулю, так как L не зависит от x^{α}. Поскольку

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^{\alpha}} = -L^{-1}\eta_{\alpha\beta}\dot{x}^{\beta}, \tag{5.2.6}$$

то получим

$$\eta_{\alpha\beta}\ddot{x}^{\beta} - \frac{1}{L}\frac{dL}{d\lambda}\eta_{\alpha\beta}\dot{x}^{\beta} = 0. \tag{5.2.7}$$

Изменяя выбор параметра $\lambda \to \lambda(\lambda')$, можно сделать L постоянным вдоль траектории[1]. В частности, в качестве параметра на мировой линии всегда можно выбрать длину вдоль кривой, т. е. собственное время частицы, которое обычно обозначают τ. (Фактически $s = c\tau$.) В этом случае вдоль кривой $\lambda = s$ и $L = 1$ и, следовательно, уравнение (5.2.7) принимает вид

$$\eta_{\alpha\beta}\ddot{x}^{\beta} = 0. \tag{5.2.8}$$

Умножая это равенство на матрицу $\eta^{\gamma\alpha}$; обратную к $\eta_{\alpha\beta}$, получим

$$\ddot{x}^{\gamma} = 0 = \frac{d^2x^{\gamma}}{d\tau^2}. \tag{5.2.9}$$

Это — условие постоянства скорости вдоль прямой линии.

Геометрические кривые, имеющие экстремальную длину, называются геодезическими. Геодезические в пространстве Минковского (т. е. в специ-

---

[1] Параметр λ в этом случае называется аффинным параметром.

альной теории относительности) представляют собой четырехмерные *прямые*. Рассмотренный выше случай $ds^2 < 0$ отвечает *времениподобным* геодезическим — мировым линиям массивных частиц. Фотоны или другие безмассовые частицы движутся со скоростью света, так что для них $ds^2 = 0$. По этой причине говорят, что свободные фотоны движутся по *нулевым геодезическим*. В этом случае нельзя выбирать в качестве параметра λ собственное время. Этот параметр удобно выбрать так, чтобы

$$\frac{dx^\alpha}{d\lambda} = p^\alpha, \tag{5.2.10}$$

где p — 4-импульс фотона. Поскольку для фотона $\eta_{\alpha\beta}\, p^\alpha p^\beta = 0$ независимо от времени, то такой выбор λ согласуется с условием $ds^2 = 0$. Аналогичным образом можно было бы выбрать параметр и для частиц с массой m, т. е. $\lambda = \tau/m$. Уравнение (5.2.9) теперь сводится к следующему:

$$\frac{dp^\alpha}{d\lambda} = 0; \qquad \text{т.е.}\ \ p^\alpha = \text{const}. \tag{5.2.11}$$

Можно также рассмотреть *пространственноподобные* геодезические, для которых $ds^2 > 0$. Они соответствуют, например, прямым линиям в трехмерном евклидовом пространстве в некоторый фиксированный момент времени x^0. [Приведенный выше вывод непосредственно переносится на этот случай после изменения знака в подкоренном выражении (5.2.4).]

Для нас важно, что вся методика, использованная выше для рассмотрения простой задачи специальной теории относительности, без изменения переносится и на общую теорию относительности. Согласно принципу эквивалентности, вариационный принцип (5.2.1) должен описывать движение пробных частиц и в общей теории относительности: свободные частицы движутся вдоль геодезических пространства-времени. Однако выражение (5.2.4) теперь принимает вид

$$L = \left[-g_{\alpha\beta}(x^\gamma)\dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta\right]^{1/2}, \tag{5.2.12}$$

так что уравнение (5.2.5) превращается в

$$g_{\alpha\beta}\ddot{x}^\beta + g_{\alpha\beta,\gamma}\dot{x}^\gamma \dot{x}^\beta - \tfrac{1}{2} g_{\gamma\beta,\alpha}\dot{x}^\gamma \dot{x}^\beta = 0. \tag{5.2.13}$$

Здесь второе слагаемое происходит от выражения

$$\frac{d}{d\lambda} g_{\alpha\beta} = \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma}\frac{dx^\gamma}{d\lambda}. \tag{5.2.14}$$

Как обычно, мы использовали сокращенное обозначение:

$$g_{\alpha\beta,\gamma} \equiv \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma}. \tag{5.2.15}$$

Мы примем аффинную параметризацию, такую, что $L = \text{const}$. Далее запишем

$$g_{\alpha\beta,\gamma}\dot{x}^\beta\dot{x}^\gamma = \tfrac{1}{2}(g_{\alpha\beta,\gamma} + g_{\alpha\gamma,\beta})\dot{x}^\beta\dot{x}^\gamma, \tag{5.2.16}$$

так что уравнение (5.2.13) примет вид

$$g_{\alpha\beta}\ddot{x}^\beta + \Gamma_{\alpha\beta\gamma}\dot{x}^\beta\dot{x}^\gamma = 0, \tag{5.2.17}$$

где

$$\Gamma_{\alpha\beta\gamma} \equiv \tfrac{1}{2}(g_{\alpha\beta,\gamma} + g_{\alpha\gamma,\beta} - g_{\gamma\beta,\alpha}). \tag{5.2.18}$$

Умножая это уравнение на матрицу, обратную метрическому тензору и обозначаемую $g^{\lambda\alpha}$, и переобозначая $\lambda \leftrightarrow \alpha$, получим

$$\ddot{x}^\alpha + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\dot{x}^\beta\dot{x}^\gamma = 0, \tag{5.2.19}$$

где

$$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} \equiv g^{\alpha\lambda}\Gamma_{\lambda\beta\gamma}. \tag{5.2.20}$$

Величины Γ называются *символами Кристоффеля*.

Уравнение (5.2.19) представляет собой окончательную форму уравнения геодезической в общей теории относительности. Отметим, как выполняется принцип эквивалентности. В локально инерциальной системе можно выбрать координаты таким образом, что $g_{\alpha\beta,\gamma} = 0$ и, следовательно, символы Кристоффеля исчезают. Таким образом, в локально инерциальной системе пробная частица движется по прямой линии с постоянной скоростью. Требование, чтобы это утверждение было справедливым в любой инерциальной системе и в любой точке пространства-времени приводит к уравнению (5.2.19), где величины Γ описывают действие гравитационного поля.

Отметим различие между использованным здесь принципом общей ковариантности и принципом лоренцевой ковариантности в специальной теории относительности. В последнем случае требуется, чтобы переход от одной инерциальной системы координат к другой не изменял форму физических законов. Скорость, входящая в закон преобразования, должна выпасть из окончательного результата. Это требование налагает весьма сильные ограничения на возможную форму законов физики. Принцип общей ковариантности не приводит ни к каким ограничениям на физические законы. Можно в принципе постулировать любой закон в локально инерциальной системе, преобразовать его к общей системе координат и утверждать, что возникшие дополнительные члены описывают эффекты гравитационного поля. Только эксперимент может сказать, справедлив ли закон.

Упражнение 5.2. Покажите, что если λ — аффинный параметр, то лагранжиан

$$L = \tfrac{1}{2}g_{\alpha\beta}\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta \tag{5.2.21}$$

на геодезических эквивалентен лагранжиану (5.2.12), т. е. покажите, что уравнение Эйлера—Лагранжа для выражения (5.2.21) приводят к таким же уравнениям геодезических с той лишь разницей, что λ более не является произвольным параметром и условие $L = \text{const}$ автоматически учтено в вариационном принципе.

Как обычно, определим импульс, канонически сопряженный координате x^α, условием

$$p_\alpha \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha}. \tag{5.2.22}$$

Из равенств (5.2.21) и (5.2.10) следует

$$p_\alpha = g_{\alpha\beta}\dot{x}^\beta = g_{\alpha\beta}p^\beta$$

или

$$p^\alpha = g^{\alpha\beta}p_\beta, \tag{5.2.23}$$

где $g^{\alpha\beta}$ — матрица, обратная $g_{\alpha\beta}$. Заметим, что если L не зависит, например, от x^1, то p_1 — интеграл движения.

Упражнение 5.3. Метрика двумерного евклидова пространства может быть записана в форме

$$ds^2 = dr^2 + r^2\, d\phi^2, \tag{5.2.24}$$

что приводит к лагранжиану ·

$$L = \tfrac{1}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2\right). \tag{5.2.25}$$

Покажите, что уравнения движения пробной частицы имеют вид

$$\ddot{r} - r\dot{\phi}^2 = 0, \tag{5.2.26}$$

$$r^2\dot{\phi} = \text{const}. \tag{5.2.27}$$

(Полагая $\lambda = t$, мы увидим, что это обычные уравнения Ньютона в пустом пространстве.)

Постоянная в уравнении (5.2.27) представляет собой момент количества движения, приходящийся на единицу массы, т. е. p_ϕ согласно определению (5.2.22). Поскольку $g^{\phi\phi} = 1/g_{\phi\phi} = 1/r^2$, то выражение (5.2.23) дает хорошо известный результат $p^\phi = \dot{\phi}$. *Физически измеряемой* величиной ϕ-компоненты момента является проекция вектора $\vec{\mathbf{p}}$ на единичный вектор в направлении ϕ. С другой стороны, координатные базисные векторы $\vec{\mathbf{e}}_r$ и $\vec{\mathbf{e}}_\phi$ удовлетворяют условиям:

$$\vec{\mathbf{e}}_r \cdot \vec{\mathbf{e}}_r = g_{rr} = 1, \qquad \vec{\mathbf{e}}_r \cdot \vec{\mathbf{e}}_\phi = g_{r\phi} = 0, \qquad \vec{\mathbf{e}}_\phi \cdot \vec{\mathbf{e}}_\phi = g_{\phi\phi} = r^2. \tag{5.2.28}$$

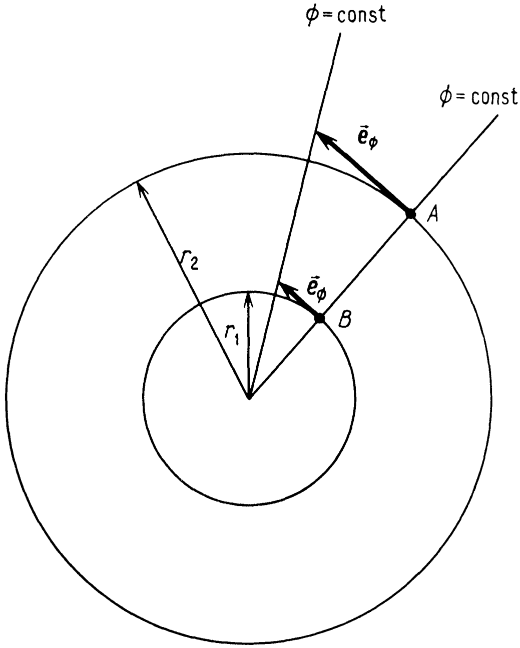

Рис. 5.1. Координатный базисный вектор $\vec{\mathbf{e}}_\phi$ в точке А в r_2/r_1 раз длиннее, чем такой же вектор в точке В. Предполагается, что линии $\phi = \text{const}$ бесконечно близки друг к другу.

Смысл последнего, например, равенства можно понять, если вспомнить, что вектор $\vec{\mathbf{e}}_\phi$ является касательным к координатной линии ϕ. Это означает (рис. 5.1), что он связывает две радиальные линии $\phi = \text{const}$. Как видно из рисунка, длины векторов $\vec{\mathbf{e}}_\phi$ для радиусов r_1 и r_2 относятся как r_1/r_2, т. е. $\vec{\mathbf{e}}_\phi \cdot \vec{\mathbf{e}}_\phi \sim r^2$, где коэффициент пропорциональности зависит от масштаба по координате ϕ. Всегда можно сделать простой выбор $\vec{\mathbf{e}}_\phi \cdot \vec{\mathbf{e}}_\phi = r^2$, как в равенстве (5.2.28). В общем случае справедливо равенство

$$\vec{\mathbf{e}}_\alpha \cdot \vec{\mathbf{e}}_\beta = g_{\alpha\beta}. \tag{5.2.29}$$

Оно следует из выражений (5.1.9) и (5.1.11), если заметить, что $d\vec{\mathbf{x}} = dx^\alpha \vec{\mathbf{e}}_\alpha$. Специальными случаями равенства (5.2.29) являются:

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij} \text{ (трехмерные декартовы)},$$

$$\vec{\mathbf{e}}_{\hat\alpha} \cdot \vec{\mathbf{e}}_{\hat\beta} = \eta_{\hat\alpha\hat\beta} \text{ (четырехмерные ортонормированные)}. \tag{5.2.30}$$

Упражнение 5.4. Покажите, что $p_\alpha = \vec{\mathbf{p}} \cdot \vec{\mathbf{e}}_\alpha$.

Указание. Разложите $\mathbf{p} = p^\beta \vec{\mathbf{e}}_\beta$.

Теперь мы можем выбрать ортонормированный набор базисных векторов в виде

$$\vec{\mathbf{e}}_{\hat{r}} = \vec{\mathbf{e}}_r, \tag{5.2.31}$$

$$\vec{\mathbf{e}}_{\hat{\phi}} = \frac{1}{r}\vec{\mathbf{e}}_\phi, \tag{5.2.32}$$

так что из равенств (5.2.28) следует

$$\vec{\mathbf{e}}_{\hat{\phi}} \cdot \vec{\mathbf{e}}_{\hat{\phi}} = \frac{1}{r^2}\vec{\mathbf{e}}_\phi \cdot \vec{\mathbf{e}}_\phi = \frac{1}{r^2} g_{\phi\phi} = 1, \text{ и т.д.} \tag{5.2.33}$$

Тогда

$$p^{\hat{\phi}} = p_{\hat{\phi}} = \vec{\mathbf{p}} \cdot \vec{\mathbf{e}}_{\hat{\phi}} = \frac{1}{r} p_\phi = r\dot{\phi}. \tag{5.2.34}$$

Результат представляет собой знакомое выражение для компоненты импульса, приходящегося на единицу массы (т. е. для скорости), вдоль вектора $\vec{\mathbf{e}}_{\hat{\phi}}$.

Иногда мы будем использовать «крышки» также для обозначения бесконечно малых смещений. Например, смещение в направлении ϕ при $r =$ $=$ const равно

$$d\hat{\phi} \equiv ds_{(r=\text{const})} = r\,d\phi. \tag{5.2.35}$$

Отсюда длина окружности радиуса r равна пути вдоль таких последовательных смещений

$$\oint_{r=\text{const}} ds = \oint d\hat{\phi} = \oint r\,d\phi = 2\pi r. \tag{5.2.36}$$

5.3. ГРАВИТАЦИОННОЕ КРАСНОЕ СМЕЩЕНИЕ

В простейшем случае гравитационное красное смещение можно рассмотреть на примере источника и детектора электромагнитных волн (т. е. фотонов), находящихся в фиксированном положении в статическом гравитационном поле. Частота излучения ν в месте расположения источника (em) равна величине, обратной интервалу собственного времени между прохождениями двух гребней волны, измеренному в системе, связанной с источником, т.е.

$$\nu_{\text{em}} = \frac{1}{d\tau_{\text{em}}} = \frac{c}{\left(-g_{\alpha\beta}\,dx^\alpha\,dx^\beta\right)^{1/2}_{\text{em}}}. \tag{5.3.1}$$