
Упражнение 5.4. Покажите, что $p_\alpha = \vec{\mathbf{p}} \cdot \vec{\mathbf{e}}_\alpha$.

Указание. Разложите $\mathbf{p} = p^\beta \vec{\mathbf{e}}_\beta$.

Теперь мы можем выбрать ортонормированный набор базисных векторов в виде

$$\vec{\mathbf{e}}_{\hat{r}} = \vec{\mathbf{e}}_r, \tag{5.2.31}$$

$$\vec{\mathbf{e}}_{\hat{\phi}} = \frac{1}{r}\vec{\mathbf{e}}_\phi, \tag{5.2.32}$$

так что из равенств (5.2.28) следует

$$\vec{\mathbf{e}}_{\hat{\phi}} \cdot \vec{\mathbf{e}}_{\hat{\phi}} = \frac{1}{r^2}\vec{\mathbf{e}}_\phi \cdot \vec{\mathbf{e}}_\phi = \frac{1}{r^2} g_{\phi\phi} = 1, \text{ и т.д.} \tag{5.2.33}$$

Тогда

$$p^{\hat{\phi}} = p_{\hat{\phi}} = \vec{\mathbf{p}} \cdot \vec{\mathbf{e}}_{\hat{\phi}} = \frac{1}{r} p_\phi = r\dot{\phi}. \tag{5.2.34}$$

Результат представляет собой знакомое выражение для компоненты импульса, приходящегося на единицу массы (т. е. для скорости), вдоль вектора $\vec{\mathbf{e}}_{\hat{\phi}}$.

Иногда мы будем использовать «крышки» также для обозначения бесконечно малых смещений. Например, смещение в направлении ϕ при $r =$ $=$ const равно

$$d\hat{\phi} \equiv ds_{(r=\text{const})} = r\, d\phi. \tag{5.2.35}$$

Отсюда длина окружности радиуса r равна пути вдоль таких последовательных смещений

$$\oint_{r=\text{const}} ds = \oint d\hat{\phi} = \oint r\, d\phi = 2\pi r. \tag{5.2.36}$$

5.3. ГРАВИТАЦИОННОЕ КРАСНОЕ СМЕЩЕНИЕ

В простейшем случае гравитационное красное смещение можно рассмотреть на примере источника и детектора электромагнитных волн (т. е. фотонов), находящихся в фиксированном положении в статическом гравитационном поле. Частота излучения ν в месте расположения источника (em) равна величине, обратной интервалу собственного времени между прохождениями двух гребней волны, измеренному в системе, связанной с источником, т.е.

$$\nu_{\text{em}} = \frac{1}{d\tau_{\text{em}}} = \frac{c}{\left(-g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta\right)^{1/2}_{\text{em}}}. \tag{5.3.1}$$

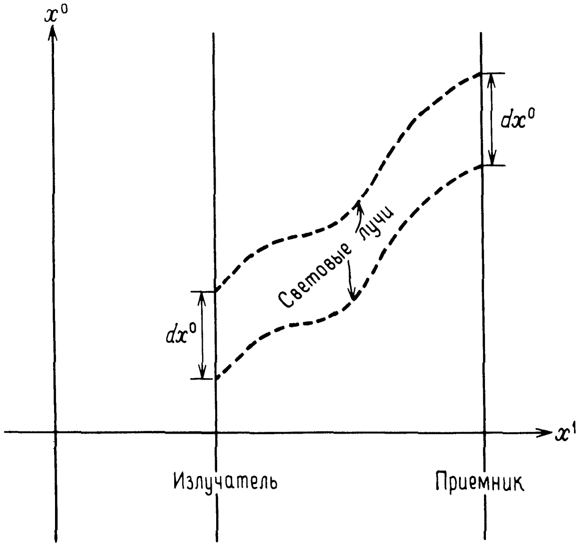

Рис. 5.2. Пространственно-временная диаграмма, изображающая гравитационное красное смещение. Вертикальные линии представляют собой мировые линии излучателя и приемника. Пунктирные кривые — мировые линии двух световых лучей, испущенных с запаздыванием dx^0 по координатному временно́му интервалу. Обратите внимание, что координаты неинерциальны (в присутствии гравитационного поля глобально инерциальной системы не существует).

Очевидно, $dx^1 = dx^2 = dx^3 = 0$, так как источник находится в покое во время излучения. Выражение, аналогичное (5.3.1), можно написать и для приемника (rec), и потому

$$\frac{\nu_{\text{rec}}}{\nu_{\text{em}}} = \frac{\left[(-g_{00})^{1/2}\, dx^0\right]_{\text{em}}}{\left[(-g_{00})^{1/2}\, dx^0\right]_{\text{rec}}}. \tag{5.3.2}$$

Координатное время dx^0, прошедшее между двумя прохождениями гребней волны, одно и то же как для источника, так и для приемника, в силу того, что гравитационное поле является статическим, и поэтому от x^0 ничего не зависит. Какова бы ни была мировая линия одного фотона, приходящего от источника к приемнику, очередной фотон следует по подобной же линии, лишь сдвинутой на dx^0 во всех точках (см. рис. 5.2.). Отсюда

$$\frac{\nu_{\text{rec}}}{\nu_{\text{em}}} = \frac{(-g_{00})^{1/2}_{\text{em}}}{(-g_{00})^{1/2}_{\text{rec}}}. \tag{5.3.3}$$