5.4. ПРЕДЕЛ СЛАБОГО ПОЛЯ

Один из способов перехода к пределу слабого поля в общей теории относительности состоит в альтернативном выводе формулы для красного смещения на основе закона сохранения энергии. Фотон с частотой ν имеет эффективную массу:

$$m = \frac{h\nu}{c^2}. \tag{5.4.1}$$

Его полная энергия в ньютоновском гравитационном поле с потенциалом $\Phi(x)$ равна $h\nu + m\Phi(x)$. Приравнивая полные энергии фотона в точках расположения источника и приемника, получим

$$\frac{\nu_{\text{rec}}}{\nu_{\text{em}}} = \frac{\left(1 + \Phi/c^2\right)_{\text{em}}}{\left(1 + \Phi/c^2\right)_{\text{rec}}}. \tag{5.4.2}$$

Поскольку для ньютоновского поля $\Phi/c^2 \ll 1$, это соотношение обычно записывают в виде

$$\frac{\Delta\nu}{\nu_{\text{em}}} = -\frac{\Delta\Phi}{c^2}, \tag{5.4.3}$$

Сравнивая выражения (5.3.3) и (5.4.2), получим в ньютоновском пределе

$$g_{00} \simeq -\left(1 + \frac{2\Phi}{c^2}\right). \tag{5.4.4}$$

К равенству (5.4.4) можно прийти и иначе, если рассмотреть движение медленной ($v \ll c$) пробной частицы в слабом гравитационном поле ($\Phi \ll c^2$). Так как поле является слабым, то можно выбрать систему координат, которая будет всюду почти лоренцевой:

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}, \qquad |h_{\alpha\beta}| \ll 1. \tag{5.4.5}$$

Поскольку скорость частицы v^j мала по сравнению с c и к тому же $g_{\alpha\beta} \approx \approx \eta_{\alpha\beta}$, то в главном порядке координатное время t совпадает с собственным временем τ. Поэтому ускорение частицы равно

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} \simeq \frac{d^2x^i}{d\tau^2} = -\Gamma^i_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau}, \tag{5.4.6}$$

где было использовано уравнение геодезической (5.2.19). Главный вклад в сумму по α и β вносит член с $\alpha = \beta = 0$; остальные меньше по крайней мере на одну степень отношения v/c:

$$\begin{aligned} \Gamma^i_{00} &\simeq \Gamma_{i00} \\ &= \tfrac{1}{2}(2h_{0i,0} - h_{00,i}) \simeq -\tfrac{1}{2}h_{00,i}, \end{aligned} \tag{5.4.7}$$

поскольку $g_{\alpha\beta} \approx \eta_{\alpha\beta}$ и $h_{0i,\,0} \approx h_{0i,\,j} v^j/c$. Таким образом,

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} \approx \frac{c^2}{2} h_{00,\,i}. \tag{5.4.8}$$

Но в ньютоновском пределе

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} = -\Phi_{,\,i}. \tag{5.4.9}$$

Сравнивая уравнения (5.4.8) и (5.4.9), получим, как и выше[1]:

$$h_{00} = -\frac{2\Phi}{c^2},$$

$$g_{00} \approx -\left(1 + \frac{2\Phi}{c^2}\right). \tag{5.4.10}$$

5.5. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ СИСТЕМА ЕДИНИЦ

В общей теории относительности весьма удобно выбрать такую систему единиц, в которой $c = G = 1$. Другими словами, время и масса измеряются в см, причем $1\ c = 3 \cdot 10^{10}$ см и 1 г $= 0{,}7425 \cdot 10^{-28}$ см. Последний числовой множитель представляет собой просто значение отношения G/c^2 в системе СГС. Более удобным для астрономических приложений переводным коэффициентом является $M_\odot = 1{,}4766$ км.

Интересно отметить, что в небесной механике измеряется именно величина $GM_\odot$. Величина $M_\odot$ *в граммах* получается из измерения G в эксперименте Кавендиша. Значение $GM_\odot$ известно с точностью порядка 10^{-8}, а гравитационная постоянная лишь с точностью 10^{-3}. Масса Солнца в километрах известна более точно, чем в граммах!

5.6. СФЕРИЧЕСКИ-СИММЕТРИЧНЫЕ ГРАВИТАЦИОННЫЕ ПОЛЯ

Предположим, что сферически-симметричная метрика может зависеть от времени t и радиальной координаты r. Зависимость от углов должна иметь вид

$$d\Omega^2 \equiv d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2. \tag{5.6.1}$$

Таким образом, в наиболее общем виде сферически-симметричную метрику можно записать как

$$ds^2 = -A(t, r)\, dt^2 + B(t, r)\, dr^2 + 2C(t, r)\, dt\, dr + D(t, r)\, d\Omega^2. \tag{5.6.2}$$

---

[1] Постоянная интегрирования, возникающая при приравнивании выражений (5.4.8) и (5.4.9) и последующем интегрировании, может быть выбрана равной нулю в силу требования $g_{\alpha\beta} \equiv \eta_{\alpha\beta}$, $h_{\alpha\beta} = 0 = \Phi$ при $r = \infty$.