поскольку $g_{\alpha\beta} \approx \eta_{\alpha\beta}$ и $h_{0i,\,0} \approx h_{0i,\,j} v^j/c$. Таким образом,

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} \approx \frac{c^2}{2} h_{00,\,i}. \tag{5.4.8}$$

Но в ньютоновском пределе

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} = -\Phi_{,\,i}. \tag{5.4.9}$$

Сравнивая уравнения (5.4.8) и (5.4.9), получим, как и выше[1]:

$$h_{00} = -\frac{2\Phi}{c^2},$$

$$g_{00} \approx -\left(1 + \frac{2\Phi}{c^2}\right). \tag{5.4.10}$$

5.5. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ СИСТЕМА ЕДИНИЦ

В общей теории относительности весьма удобно выбрать такую систему единиц, в которой $c = G = 1$. Другими словами, время и масса измеряются в см, причем $1\ c = 3 \cdot 10^{10}$ см и $1\ г = 0{,}7425 \cdot 10^{-28}$ см. Последний числовой множитель представляет собой просто значение отношения G/c^2 в системе СГС. Более удобным для астрономических приложений переводным коэффициентом является $M_\odot = 1{,}4766$ км.

Интересно отметить, что в небесной механике измеряется именно величина $GM_\odot$. Величина $M_\odot$ *в граммах* получается из измерения G в эксперименте Кавендиша. Значение $GM_\odot$ известно с точностью порядка 10^{-8}, а гравитационная постоянная лишь с точностью 10^{-3}. Масса Солнца в километрах известна более точно, чем в граммах!

5.6. СФЕРИЧЕСКИ-СИММЕТРИЧНЫЕ ГРАВИТАЦИОННЫЕ ПОЛЯ

Предположим, что сферически-симметричная метрика может зависеть от времени t и радиальной координаты r. Зависимость от углов должна иметь вид

$$d\Omega^2 \equiv d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2. \tag{5.6.1}$$

Таким образом, в наиболее общем виде сферически-симметричную метрику можно записать как

$$ds^2 = -A(t, r)\, dt^2 + B(t, r)\, dr^2 + 2C(t, r)\, dt\, dr + D(t, r)\, d\Omega^2. \tag{5.6.2}$$

[1] Постоянная интегрирования, возникающая при приравнивании выражений (5.4.8) и (5.4.9) и последующем интегрировании, может быть выбрана равной нулю в силу требования $g_{\alpha\beta} \equiv \eta_{\alpha\beta}$, $h_{\alpha\beta} = 0 = \Phi$ при $r = \infty$.

Введем новую радиальную координату

$$r' = D^{1/2}(t, r). \tag{5.6.3}$$

Подставляя это в выражение (5.6.2) и опуская штрих, получим

$$ds^2 = -E(t, r)\,dt^2 + F(t, r)\,dr^2 + 2G(t, r)\,dt\,dr + r^2\,d\Omega^2, \tag{5.6.4}$$

где E, F и G определенным образом связаны с A, B и C, однако мы не будем выписывать эту связь явно. Можно обратить в нуль коэффициент перед $dt\,dr$, введя новую временну́ю координату t'. Вид выражения (5.6.4) побуждает испробовать подстановку

$$dt' = E(t, r)\,dt - G(t, r)\,dr. \tag{5.6.5}$$

Однако в общем случае правая часть равенства (5.6.5) не является полным дифференциалом. В силу того что независимых переменных всего две (t и r), должен существовать интегрирующий множитель, т. е. функция $H(t, r)$, такая, что

$$dt' = H(t, r)[E(t, r)\,dt - G(t, r)\,dr] \tag{5.6.6}$$

будет полным дифференциалом. Эта подстановка в выражение (5.6.4) оставляет в метрике всего две произвольные функции: коэффициенты перед $(dt')^2$ и dr^2. Опуская штрих, запишем окончательно

$$ds^2 = -e^{2\Phi}\,dt^2 + e^{2\lambda}\,dr^2 + r^2\,d\Omega^2, \tag{5.6.7}$$

где Φ и λ — функции t и r. Мы используем экспоненциальную форму коэффициентов из соображений удобства в дальнейшем.

Важный результат ньютоновской теории гравитации состоит в том, что в любой точке вне сферически-симметричного распределения масс гравитационное поле зависит только от внутренней массы. Более того, даже если масса внутри движется сферически-симметричным образом, поле снаружи не зависит от времени. Мы просто имеем $\Phi = -M/r$.

Этот результат справедлив и в общей теории относительности, где он носит название *теоремы Биркгофа* и формулируется следующим образом: сферически-симметричное гравитационное поле в вакууме обязательно является статическим. Соответствующая метрика называется *метрикой Шварцшильда*:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2\,d\Omega^2. \tag{5.6.8}$$

Слово «вакуум» здесь означает область пространства-времени, где гравитационные эффекты находящейся там материи пренебрежимо малы. Постоянная M, появившаяся в выражении (5.6.8), представляет собой массу источника. В этом можно убедиться, например рассмотрев в этом выражении предел слабого поля, $r \gg M$. Тогда равенство (5.4.4) показывает, что ньютоновский потенциал равен $-M/r$, т. е. M — действительно масса.

Определенную таким образом массу можно измерить, скажем, изучая движение спутников, находящихся на удаленных орбитах, и используя законы Кеплера, как в обычной небесной механике. Метрика Шварцшильда определена всюду *вне* сферической звезды непосредственно вплоть до ее поверхности.

Из-за относительно простой формы выражения (5.6.8) координаты имеют непосредственную физическую интерпретацию. Для любого радиуса r существует 2-сфера эквивалентных точек[1], а θ и ϕ являются полярными координатами на этой 2-сфере. Величина r определяется таким образом, чтобы длина соответствующей окружности на этой 2-сфере равнялась $2\pi r$ или чтобы площадь ее поверхности равнялась $4\pi r^2$. В этом можно убедиться, положив в выражении (5.6.8) $t = \text{const}$ и $r = \text{const}$. Тогда метрика на 2-сфере примет вид

$$ {}^{(2)}ds^2 = r^2\, d\Omega^2. \tag{5.6.9}$$

Вспоминая, что ds^2 описывает результаты физических измерений, получим, что, например, длина большого круга на 2-сфере равна

$$\oint_{\theta=\pi/2} {}^{(2)}ds = \int_0^{2\pi} r\, d\phi = 2\pi r, \tag{5.6.10}$$

как и утверждалось. Заметим, что расстояние между двумя точками r_1 и r_2 на радиальной линии равно

$$\int_{r_1}^{r_2} (g_{rr})^{1/2}\, dr \neq r_2 - r_1. \tag{5.6.11}$$

Временнáя координата t была выбрана так, чтобы явно проявлялась статическая природа решения, т. е. чтобы поле было инвариантно при замене $t \to t + \Delta t$. Нормировка координаты t такова, что она совпадает с временнóй координатой пространства Минковского при $r \gg M$, где метрика (5.6.8) сводится к метрике специальной теории относительности.

§ 7. СФЕРИЧЕСКИЕ ЗВЕЗДЫ

Метрика (5.6.7) описывает также гравитационное поле внутри сферической звезды. Для звезды, находящейся в гидростатическом равновесии, можно взять Φ и λ не зависящими от t. Предположим, что вещество звезды можно считать идеальной жидкостью, и установим далее вид уравнения состояния

$$\rho = \rho(n, s). \tag{5.7.1}$$

(Так как $c = 1$, мы не будем проводить различия между плотностью энергии ε и плотностью массы $\rho = \varepsilon/c^2$.) Давление можно найти, используя

[1] Это двумерная сферическая поверхность с центром в точке $r=0$.