Определенную таким образом массу можно измерить, скажем, изучая движение спутников, находящихся на удаленных орбитах, и используя законы Кеплера, как в обычной небесной механике. Метрика Шварцшильда определена всюду *вне* сферической звезды непосредственно вплоть до ее поверхности.

Из-за относительно простой формы выражения (5.6.8) координаты имеют непосредственную физическую интерпретацию. Для любого радиуса r существует 2-сфера эквивалентных точек[1], а θ и ϕ являются полярными координатами на этой 2-сфере. Величина r определяется таким образом, чтобы длина соответствующей окружности на этой 2-сфере равнялась $2\pi r$ или чтобы площадь ее поверхности равнялась $4\pi r^2$. В этом можно убедиться, положив в выражении (5.6.8) $t = \text{const}$ и $r = \text{const}$. Тогда метрика на 2-сфере примет вид

$$^{(2)}ds^2 = r^2\, d\Omega^2. \tag{5.6.9}$$

Вспоминая, что ds^2 описывает результаты физических измерений, получим, что, например, длина большого круга на 2-сфере равна

$$\oint_{\theta=\pi/2} {}^{(2)}ds = \int_0^{2\pi} r\, d\phi = 2\pi r, \tag{5.6.10}$$

как и утверждалось. Заметим, что расстояние между двумя точками r_1 и r_2 на радиальной линии равно

$$\int_{r_1}^{r_2} (g_{rr})^{1/2}\, dr \neq r_2 - r_1. \tag{5.6.11}$$

Временна́я координата t была выбрана так, чтобы явно проявлялась статическая природа решения, т. е. чтобы поле было инвариантно при замене $t \to t + \Delta t$. Нормировка координаты t такова, что она совпадает с временно́й координатой пространства Минковского при $r \gg M$, где метрика (5.6.8) сводится к метрике специальной теории относительности.

§ 7. СФЕРИЧЕСКИЕ ЗВЕЗДЫ

Метрика (5.6.7) описывает также гравитационное поле внутри сферической звезды. Для звезды, находящейся в гидростатическом равновесии, можно взять Φ и λ не зависящими от t. Предположим, что вещество звезды можно считать идеальной жидкостью, и установим далее вид уравнения состояния

$$\rho = \rho(n, s). \tag{5.7.1}$$

(Так как $c = 1$, мы не будем проводить различия между плотностью энергии ε и плотностью массы $\rho = \varepsilon/c^2$.) Давление можно найти, используя

---

[1] Это двумерная сферическая поверхность с центром в точке $r=0$.

первый закон термодинамики, согласно соотношению (2.1.7):

$$P = P(n, s). \tag{5.7.2}$$

Хотя идеальная жидкость ведет себя адиабатически (энтропия s элемента жидкости остается постоянной), она не обязательно является изоэнтропийной (s может и не иметь всюду одно и то же значение). Однако в случае холодных белых карликов и нейтронных звезд температура фактически всюду равна нулю (точнее, $kT \ll E_F'$) и, следовательно, всюду $s = 0$. Позже мы обсудим сверхмассивные звезды, в которых s однородна вследствие конвекции. В силу этого уравнение состояния можно взять в виде

$$P = P(\rho). \tag{5.7.3}$$

Уравнения, описывающие внутреннее строение в общей теории относительности, выведены в стандартных учебниках. Мы запишем их в форме, которая подчеркивает сходство с ньютоновской динамикой. Прежде всего определим новую метрическую функцию $m(r)$ с помощью равенства

$$e^{2\lambda} \equiv \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1}. \tag{5.7.4}$$

Тогда уравнения Эйнштейна дают

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho, \tag{5.7.5}$$

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{\rho m}{r^2}\left(1 + \frac{P}{\rho}\right)\left(1 + \frac{4\pi P r^3}{m}\right)\left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1}, \tag{5.7.6}$$

$$\frac{d\Phi}{dr} = -\frac{1}{\rho}\frac{dP}{dr}\left(1 + \frac{P}{\rho}\right)^{-1}. \tag{5.7.7}$$

Ньютоновский предел достигается при $P \ll \rho$ и $m \ll r$.

Уравнение (5.7.6) называется уравнением гидростатического равновесия Оппенгеймера—Волкова.

Величину $m(r)$ можно интерпретировать как массу внутри сферы радиусом r. Уравнение (5.7.5) дает для полной массы звезды величину[1)]

$$M = \int_0^R 4\pi r^2 \rho \, dr \tag{5.7.8}$$

Заметим, что сюда включены все возможные вклады в массу, включая гравитационную потенциальную энергию. Это обстоятельство иногда маскируется простым видом равенства (5.7.8), однако напомним, что элемент объема здесь равен не $4\pi r^2 dr$, а величине

$$d\mathcal{V} = (g_{rr})^{1/2} dr \times 4\pi r^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1/2} 4\pi r^2 \, dr. \tag{5.7.9}$$

[1)] Величина $m(R)$ должна быть равной M, чтобы коэффициент внутренней метрики Шварцшильда (5.7.4) гладко сшивался с внешней метрикой (5.6.8).

Таким образом, равенство (5.7.8) не просто суммирует $\rho\, d\mathscr{V}$, т. е. локальные вклады в полную массу-энергию, но и включает глобальный вклад отрицательной потенциальной энергии звезды.

Уравнения (5.7.5) — (5.7.7) нетрудно решить численно, построив тем самым общерелятивистскую модель звезды:

1. Выберем значение плотности в центре звезды ρ_c. Уравнение состояния позволит найти P_c. Кроме того, имеется граничное условие $m(r = 0) = 0$.

2. Проинтегрируем уравнения (5.7.5) и (5.7.6), начав с $r = 0$ и используя в качестве начальных условий значения, взятые в п. 1. При этом величина P устанавливается с помощью уравнения состояния по изменяющейся величине ρ.

3. Значение $r = R$, для которого $P = 0$, представляет собой радиус звезды, а $m(R) = M$.

4. Метрическая функция Φ имеет граничное значение

$$\Phi(r = R) = \frac{1}{2} \ln\left(1 - \frac{2M}{R}\right), \tag{5.7.10}$$

так что она гладко сшивается с метрикой Шварцшильда (5.6.8) на поверхности. При численном расчете удобно выбрать произвольное значение $\Phi(r = 0)$ и проинтегрировать уравнение (5.7.7), начав с $r = 0$, совместно с уравнениями (5.7.5) и (5.7.6). Поскольку уравнение (5.7.7) линейно по Φ, к Φ можно прибавить произвольную постоянную, с тем чтобы удовлетворить условию (5.7.10).

Упражнение 5.5. Покажите, что внутри звезды с однородной плотностью справедливы соотношения:

$$\frac{P}{\rho} = \frac{\left(1 - 2Mr^2/R^3\right)^{1/2} - \left(1 - 2M/R\right)^{1/2}}{3\left(1 - 2M/R\right)^{1/2} - \left(1 - 2Mr^2/R^3\right)^{1/2}}, \tag{5.7.11}$$

$$e^{\Phi} = \frac{3}{2}\left(1 - \frac{2M}{R}\right)^{1/2} - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2Mr^2}{R^3}\right)^{1/2}. \tag{5.7.12}$$

Покажите, что условие $P_c < \infty$ приводит к ограничению

$$\frac{2M}{R} < \frac{8}{9}. \tag{5.7.13}$$

Предел, выражаемый неравенством (5.7.13), для максимального сжатия равновесной однородной сферы, справедлив в действительности для произвольного профиля плотности, если только плотность не растет с увеличением расстояния от центра[1)].

[1)] См., например, книгу Вейнберга [606], разд. 11.6.