Глава 6

# Равновесие и устойчивость жидких тел

В этой главе мы выведем некоторые основные свойства равновесных и устойчивых состояний звезд. В разд. 6.1 приводятся фундаментальные уравнения движения жидкости (сплошной среды); на эти сведения мы будем неоднократно ссылаться далее в этой книге. В разд. 6.2—6.8 развивается ньютоновская теория равновесия и устойчивости для неврашающихся звезд, которая включает исследование возмущений жидких тел. Основные результаты указанных разделов суммированы в резюме 6.1. Эти результаты обобщаются с учетом эффектов общей теории относительности в разд. 6.9, причем сводка результатов приводится в начале этого раздела. Наконец, в разд. 6.10 полученные результаты применяются к белым карликам. Вычисления, приведенные в этом последнем разделе, являются прототипом аналогичных вычислений, представленных далее в книге.

## 6.1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

Начнем со сводки уравнений, определяющих движение *нерелятивистской* однородной сплошной среды[1].

Сохранение массы описывается уравнением неразрывности, которое связывает плотность среды $\rho$ и ее скорость $\mathbf{v}$:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0. \tag{6.1.1}$$

Уравнение, описывающее сохранение импульса (второй закон Ньютона, $\mathbf{a} = \mathbf{F}/m$, в применении к сплошной среде), имеет вид

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla P - \nabla \Phi, \tag{6.1.2}$$

где $P$ — давление, $\Phi$ — гравитационный потенциал.
Здесь

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \tag{6.1.3}$$

— *полная* производная по времени для индивидуального объема жидкости (называемая также субстанциональной, или *лагранжевой*, производной), а $\partial/\partial t$ — обыкновенная частная производная по времени в фиксированной

---

[1] См., например, книгу Ландау и Лифшица [339].

точке пространства (*эйлерова* производная). Если включить в правую часть уравнения (6.1.2) диссипативные члены, описывающие вязкость, то получим *уравнение Навье — Стокса* (см. приложение 3).

Гравитационный потенциал определяется уравнением Пуассона

$$\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho. \tag{6.1.4}$$

Уравнение, описывающее возрастание энтропии, имеет вид

$$ds/dt = \text{сумма источников энтропии}. \tag{6.1.5}$$

Обычно правую часть выражают через функцию температуры и плотности; она отвечает возрастанию энтропии, связанному с такими диссипативными процессами, как теплопроводность, вязкость при сдвигах и расширении, испускание и поглощение лучистой энергии и т.д. В этой главе мы ограничимся изучением *адиабатических* потоков, для которых

$$\frac{ds}{dt} = 0. \tag{6.1.6}$$

Иными словами, мы считаем, что для каждого элемента жидкости энтропия сохраняется. Заметим, что в нерелятивистском случае такие термодинамические величины, как например энтропию, обычно относят к единице массы, а не к одному бариону. Эти два определения различаются просто множителем $m_{\text{B}}$.

В общем (не обязательно адиабатическом) случае соотношения (6.1.1), (6.1.2) и (6.1.5) представляют собой пять динамических уравнений, описывающих изменения во времени величин $\rho$, $\mathbf{v}$ и $s$ от соответствующих начальных значений. В каждый момент времени потенциал $\Phi$ определяется по $\rho$ из уравнения (6.1.4), а давление $P$ и температура $T$ определяются из уравнения состояния. Уравнение состояния удобно найти, задав внутреннюю энергию на единицу массы:

$$u = u(\rho, s). \tag{6.1.7}$$

Из первого закона термодинамики

$$du = -Pd\left(\frac{1}{\rho}\right) + T\,ds, \tag{6.1.8}$$

и формулы (6.1.7) получаем

$$P = \rho^2 \left.\frac{\partial u}{\partial \rho}\right|_s, \tag{6.1.9}$$

$$T = \left.\frac{\partial u}{\partial s}\right|_\rho. \tag{6.1.10}$$

Таким образом, заложена основа для полного описания движения сплошной среды.

Использование первого закона термодинамики в виде (6.1.8) при рассмотрении неравновесных процессов, которые подразумеваются в уравнении (6.1.5), могло бы вызвать возражения. Ведь обычно предполагается, что уравнение (6.1.8) справедливо лишь для квазистатических изменений, которые представляются в виде последовательности равновесных состояний. На самом деле мы неявно предполагаем, что отклонения от равновесия малы. Так как при равновесии энтропия максимальна, то ее приращение — эффект второго порядка по отклонениям от равновесия. Таким образом ошибка, связанная с использованием соотношений (6.1.7), (6.1.9) и (6.1.10), которые справедливы лишь при равновесии, также второго порядка, и ею можно пренебречь[1].

---

*Упражнение 6.1.* Уравнение теплопроводности

$$\mathbf{q} = -\kappa \nabla T, \tag{6.1.11}$$

где $\mathbf{q}$ — поток тепла и $\kappa$ — коэффициент теплопроводности, можно рассматривать как первый член в разложении вблизи равновесного состояния, для которого $\nabla T = 0$. Изменение энтропии определяется уравнением

$$\rho T \frac{ds}{dt} = -\nabla \cdot \mathbf{q}. \tag{6.1.12}$$

Вывести формулу

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho s) + \nabla \cdot \left(\rho \mathbf{v} s + \frac{\mathbf{q}}{T}\right) = \kappa \left(\frac{\nabla T}{T}\right)^2. \tag{6.1.13}$$

Интегрируя по объему жидкости, проверить, что приращение энтропии есть величина второго порядка по $\nabla T$. Какова физическая интерпретация члена $\rho \mathbf{v} s + \mathbf{q}/T$?

---

Задача существенно упрощается, если $s$ не только не меняется со временем в каждом элементе объема жидкости, но и постоянна по объему. Другими словами, $s = \text{const}$ всюду; при этом поток называется *изоэнтропическим*. В этом случае достаточно задать одно параметрическое уравнение состояния, например:

$$u = u(\rho), \tag{6.1.14}$$

которое, согласно (6.1.9), эквивалентно условию

$$P = P(\rho). \tag{6.1.15}$$

Заметим, что условие гидростатического равновесия получается из (6.1.2.), если положить $\mathbf{v} = 0$,

$$\nabla P + \rho \nabla \Phi = 0. \tag{6.1.16}$$

---

[1] Для определения поведения сплошной среды вдали от равновесия нужно использовать полное уравнение переноса Больцмана (см. [479], разд. 14.5.)

Мощным методом анализа условий равновесия и устойчивости жидких тел является исследование возмущений. Будет показано, что равновесные состояния могут быть найдены из вариационного принципа: в равновесии энергия достигает экстремума. Частоты колебаний вблизи равновесного состояния могут быть найдены из рассмотрения малых отклонений от равновесия. Синусоидальные колебания соответствуют устойчивому равновесию (минимум энергии), а экспоненциальный рост свидетельствует о неустойчивости (максимум энергии). Ниже мы разработаем формализм, необходимый для доказательства и использования этих принципов. Конечной целью будет определение критериев *глобального* равновесия и устойчивости для белых карликов и нейтронных звезд.

## 6.2. ЛАГРАНЖЕВЫ И ЭЙЛЕРОВЫ ВОЗМУЩЕНИЯ

Укажем прежде всего различие между двумя возможными описаниями возмущений в сплошной среде. В первом случае мы стоим на «макроскопической» точке зрения: рассматриваются просто изменения описывающих сплошную среду переменных в данной точке пространства. Такие возмущения мы будем называть эйлеровыми, для них используются обозначения $\delta p$, $\delta P$, $\delta v^i$.Точнее говоря, если $Q(\mathbf{x}, t)$ — некоторая величина, характеризующая возмущенный поток жидкости, а $Q_0(\mathbf{x}, t)$ — ее значение для невозмущенного потока, то

$$\delta Q \equiv Q(\mathbf{x}, t) - Q_0(\mathbf{x}, t). \tag{6.2.1}$$

При «микроскопическом» подходе определяется *лагранжево смещение* $\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}, t)$, которое связывает элементы сплошной среды в невозмущенном состоянии с соответствующими элементами в возмущенном состоянии. При этом лагранжево изменение $\Delta Q$ величины $Q$ определяется как

$$\Delta Q \equiv Q[\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}, t), t] - Q_0(\mathbf{x}, t). \tag{6.2.2}$$

Иными словами, элемент сплошной среды перемещается из точки $\mathbf{x}$ в точку $\mathbf{x}+\boldsymbol{\xi}$, и мы сравниваем значения $Q$ для данного элемента. Сопоставляя формулы (6.2.1) и (6.2.2), приходим к операторному соотношению

$$\Delta = \delta + \boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\nabla}, \tag{6.2.3}$$

которое применимо для скалярных величин $Q$. Это же соотношение мы будем использовать и для векторов. Вероятно, полезным обобщением этого соотношения является производная Ли[1)], однако это усовершенствование нам здесь не понадобится.

---

[1)] См., например, [209].