Мощным методом анализа условий равновесия и устойчивости жидких тел является исследование возмущений. Будет показано, что равновесные состояния могут быть найдены из вариационного принципа: в равновесии энергия достигает экстремума. Частоты колебаний вблизи равновесного состояния могут быть найдены из рассмотрения малых отклонений от равновесия. Синусоидальные колебания соответствуют устойчивому равновесию (минимум энергии), а экспоненциальный рост свидетельствует о неустойчивости (максимум энергии). Ниже мы разработаем формализм, необходимый для доказательства и использования этих принципов. Конечной целью будет определение критериев *глобального* равновесия и устойчивости для белых карликов и нейтронных звезд.

6.2. ЛАГРАНЖЕВЫ И ЭЙЛЕРОВЫ ВОЗМУЩЕНИЯ

Укажем прежде всего различие между двумя возможными описаниями возмущений в сплошной среде. В первом случае мы стоим на «макроскопической» точке зрения: рассматриваются просто изменения описывающих сплошную среду переменных в данной точке пространства. Такие возмущения мы будем называть эйлеровыми, для них используются обозначения δp, δP, δv^i.Точнее говоря, если $Q(\mathbf{x}, t)$ — некоторая величина, характеризующая возмущенный поток жидкости, а $Q_0(\mathbf{x}, t)$ — ее значение для невозмущенного потока, то

$$\delta Q \equiv Q(\mathbf{x}, t) - Q_0(\mathbf{x}, t). \tag{6.2.1}$$

При «микроскопическом» подходе определяется *лагранжево смещение* $\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}, t)$, которое связывает элементы сплошной среды в невозмущенном состоянии с соответствующими элементами в возмущенном состоянии. При этом лагранжево изменение ΔQ величины Q определяется как

$$\Delta Q \equiv Q[\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}, t), t] - Q_0(\mathbf{x}, t). \tag{6.2.2}$$

Иными словами, элемент сплошной среды перемещается из точки $\mathbf{x}$ в точку $\mathbf{x}+\boldsymbol{\xi}$, и мы сравниваем значения Q для данного элемента. Сопоставляя формулы (6.2.1) и (6.2.2), приходим к операторному соотношению

$$\Delta = \delta + \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla, \tag{6.2.3}$$

которое применимо для скалярных величин Q. Это же соотношение мы будем использовать и для векторов. Вероятно, полезным обобщением этого соотношения является производная Ли[1)], однако это усовершенствование нам здесь не понадобится.

[1)] См., например, [209].

Лагранжево изменение скорости элемента сплошной среды $\Delta\mathbf{v}$ — это скорость возмущенного потока в точке $\mathbf{x}+\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}, t)$ *относительно скорости того же элемента в точке* $\mathbf{x}$ для невозмущенного потока, т.е.

$$\Delta\mathbf{v} = \frac{d}{dt}(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}) - \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{\xi}}{dt}. \tag{6.2.4}$$

Упражнение 6.2. Доказать следующие коммутационные соотношения, которые будут использованы далее в этой главе:

а) $$\delta\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\delta \tag{6.2.5}$$

б) $$\delta\frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{\partial}{\partial x^i}\delta \tag{6.2.6}$$

в) $$\Delta\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\Delta - \frac{\partial\boldsymbol{\xi}}{\partial t}\cdot\nabla \tag{6.2.7}$$

г) $$\Delta\frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{\partial}{\partial x^i}\Delta - \frac{\partial\xi^j}{\partial x^i}\nabla_j \tag{6.2.8}$$

д) $$\Delta\frac{d}{dt} = \frac{d}{dt}\Delta \tag{6.2.9}$$

е) $$\delta\frac{d}{dt} = \frac{d}{dt}\Delta - (\boldsymbol{\xi}\cdot\nabla)\frac{d}{dt} \tag{6.2.10}$$

6.3. ВОЗМУЩЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ВЕЛИЧИН

Рассмотрим интеграл

$$I = \int_V Q_0(\mathbf{x}, t)\, d^3x. \tag{6.3.1}$$

Тот же интеграл, определенный по отношению к возмущенному потоку, имеет вид

$$\int_{V+\Delta V} Q(\mathbf{x}, t)\, d^3x, \tag{6.3.2}$$

где $V+\Delta V$ — объем, возникающий из V при смещении точек границы, соответствующем вектору $\boldsymbol{\xi}$. По определению *первая вариация* интеграла I, возникающая при возмущении, равна[1)]

$$\delta I \equiv \int_{V+\Delta V} Q(\mathbf{x}, t)\, d^3x - \int_V Q_0(\mathbf{x}, t)\, d^3x. \tag{6.3.3}$$

При замене переменных в первом интеграле, $\mathbf{x}' = \mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}, t)$, объемы инте-

---

[1)] Обозначение δI не следует путать с обозначением эйлерова возмущения локальной величины в жидкости.