Лагранжево изменение скорости элемента сплошной среды $\Delta\mathbf{v}$ — это скорость возмущенного потока в точке $\mathbf{x}+\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}, t)$ *относительно скорости того же элемента в точке* $\mathbf{x}$ для невозмущенного потока, т.е.

$$\Delta\mathbf{v} = \frac{d}{dt}(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}) - \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{\xi}}{dt}. \tag{6.2.4}$$

Упражнение 6.2. Доказать следующие коммутационные соотношения, которые будут использованы далее в этой главе:

а) $$\delta\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\delta \tag{6.2.5}$$

б) $$\delta\frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{\partial}{\partial x^i}\delta \tag{6.2.6}$$

в) $$\Delta\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\Delta - \frac{\partial\boldsymbol{\xi}}{\partial t}\cdot\nabla \tag{6.2.7}$$

г) $$\Delta\frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{\partial}{\partial x^i}\Delta - \frac{\partial\xi^j}{\partial x^i}\nabla_j \tag{6.2.8}$$

д) $$\Delta\frac{d}{dt} = \frac{d}{dt}\Delta \tag{6.2.9}$$

е) $$\delta\frac{d}{dt} = \frac{d}{dt}\Delta - (\boldsymbol{\xi}\cdot\nabla)\frac{d}{dt} \tag{6.2.10}$$

6.3. ВОЗМУЩЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ВЕЛИЧИН

Рассмотрим интеграл

$$I = \int_V Q_0(\mathbf{x}, t)\, d^3x. \tag{6.3.1}$$

Тот же интеграл, определенный по отношению к возмущенному потоку, имеет вид

$$\int_{V+\Delta V} Q(\mathbf{x}, t)\, d^3x, \tag{6.3.2}$$

где $V+\Delta V$ — объем, возникающий из V при смещении точек границы, соответствующем вектору $\boldsymbol{\xi}$. По определению *первая вариация* интеграла I, возникающая при возмущении, равна[1)]

$$\delta I \equiv \int_{V+\Delta V} Q(\mathbf{x}, t)\, d^3x - \int_V Q_0(\mathbf{x}, t)\, d^3x. \tag{6.3.3}$$

При замене переменных в первом интеграле, $\mathbf{x}' = \mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}, t)$, объемы инте-

---

[1)] Обозначение δI не следует путать с обозначением эйлерова возмущения локальной величины в жидкости.

грирования в обоих членах совпадают. В низшем порядке по возмущению якобиан преобразования равен

$$J = \frac{\partial(\mathbf{x})}{\partial(\mathbf{x}')} = \frac{\partial(\mathbf{x}' + \boldsymbol{\xi})}{\partial(\mathbf{x}')} = 1 + \nabla' \cdot \boldsymbol{\xi} \tag{6.3.4}$$

при бесконечно малом ξ. Таким образом,

$$\delta I = \int_V Q(\mathbf{x}' + \boldsymbol{\xi}, t) J \, d^3x' - \int_V Q_0(\mathbf{x}, t) \, d^3x. \tag{6.3.5}$$

Заменяя обозначение переменной интегрирования в первом члене, $\mathbf{x}' \to \mathbf{x}$, получим окончательно

$$\delta I = \int_V (\Delta Q + Q\nabla \cdot \boldsymbol{\xi}) \, d^3x. \tag{6.3.6}$$

Формулу (6.3.6) можно использовать при выводе выражения для $\Delta\rho$. Масса в произвольном объеме жидкости V сохраняется, поэтому

$$\delta \int_V \rho \, d^3x = 0. \tag{6.3.7}$$

Таким образом,

$$\Delta\rho = -\rho\nabla \cdot \boldsymbol{\xi}, \tag{6.3.8}$$

и, следовательно,

$$\delta\rho = -\nabla \cdot (\rho\boldsymbol{\xi}). \tag{6.3.9}$$

Упражнение 6.3. Вывести формулу (6.3.8), рассматривая возмущение уравнения неразрывности в дифференциальной форме:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho\nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \tag{6.3.10}$$

Упражнение 6.4. Показать, что

$$\delta \int_V Q\rho \, d^3x = \int_V \Delta Q \, \rho \, d^3x. \tag{6.3.11}$$

Для уравнения состояния вида

$$P = P(\rho, s) \tag{6.3.12}$$

мы ограничимся рассмотрением адиабатических возмущений,

$$\Delta s = 0. \tag{6.3.13}$$

Это значит, что

$$\frac{\Delta P}{P} = \Gamma_1 \frac{\Delta\rho}{\rho}, \tag{6.3.14}$$

где

$$\Gamma_1 = \left.\frac{\partial \ln P}{\partial \ln \rho}\right|_s \tag{6.3.15}$$

— показатель адиабаты для *возмущений*. Заметим, что в принципе показатель Γ_1 не обязательно должен быть равным показателю Γ, определяющему соотношение между давлением и плотностью в равновесном состоянии. Например, это может быть связано с тем, что некоторые реакции, необходимые для достижения полного термодинамического равновесия, не успевают протекать за времена, характерные для возмущения, или же просто с тем, что равновесное соотношение между давлением и плотностью *моделируется* определенным образом (например, в виде политропы с постоянным Γ), а локальное значение показателя Γ_1 не совпадает с модельным значением.

Возмущение внутренней ньютоновской энергии на единицу массы u для адиабатических возмущений может быть найдено из уравнения состояния (6.3.12) и первого закона термодинамики (6.1.8):

$$\Delta u = \left(\frac{\partial u}{\partial \rho}\right)_s \Delta\rho + \left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)_\rho \Delta s = \frac{P}{\rho^2}\Delta\rho + T\Delta s = \frac{P}{\rho^2}\Delta\rho. \tag{6.3.16}$$

Возмущение гравитационного потенциала находится из возмущенной формы уравнения (6.1.4):

$$\nabla^2 \delta\Phi = 4\pi G\, \delta\rho. \tag{6.3.17}$$

Из формул (6.3.17) и (6.3.9) следует

$$\delta\Phi = -G\int \frac{\delta\rho'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x' \tag{6.3.18}$$

$$= G\int \frac{\nabla' \cdot (\rho'\boldsymbol{\xi}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x' \tag{6.3.18a}$$

$$= -G\int \rho'\boldsymbol{\xi}' \cdot \nabla' \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x'. \tag{6.3.19}$$

Чтобы получить последнее равенство, мы проинтегрировали по частям и отбросили поверхностный член, так как $\rho = 0$ на поверхности. (Если на поверхности $\rho \neq 0$, например, в случае несжимаемой жидкости, то последнее равенство справедливо только для возмущений ξ, касательных к поверхности.)

Упражнение 6.5. Показать, что для *радиальных* возмущений сферической звезды из формулы (6.3.18а) следует

$$\nabla_i \, \delta\Phi = -4\pi G\rho\xi^i. \tag{6.3.20}$$

Указание. Можно воспользоваться разложением функции $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^{-1}$ в сферических координатах.

6.4. РАВНОВЕСИЕ КАК УСЛОВИЕ ЭКСТРЕМУМА ЭНЕРГИИ

В этом разделе мы выведем вариационный принцип для уравнения гидростатического равновесия. Будет показано, что равновесие отвечает экстремуму энергии данной конфигурации.

Полная энергия имеет вид

$$E = T + U + W, \tag{6.4.1}$$

где

$$T = \int \frac{1}{2} v^2 \rho \, d^3x \tag{6.4.2}$$

— кинетическая энергия,

$$U = \int u\rho \, d^3x \tag{6.4.3}$$

— внутренняя энергия и

$$W = \int \frac{1}{2} \Phi\rho \, d^3x \tag{6.4.4}$$

— гравитационная потенциальная энергия.

Ограничимся случаем статического равновесия ($\mathbf{v} = 0$). При этом $\delta T = 0$ в первом порядке по всем возмущениям, и можно исключить кинетическую энергию из выражения вариационного принципа. Для внутренней энергии имеем

$$\delta U = \int \Delta u \, \rho \, d^3x = -\int P \nabla \cdot \boldsymbol{\xi} \, d^3x, \tag{6.4.5}$$

причем мы использовали формулы (6.3.11), (6.3.16) и (6.3.8). Интегрирование по частям дает (так как на поверхности $P = 0$)

$$\delta U = \int \nabla P \cdot \boldsymbol{\xi} \, d^3x. \tag{6.4.6}$$

Вариация W дает

$$\delta W = \frac{1}{2} \int [\delta\Phi \, \rho + \rho(\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla)\Phi] \, d^3x, \tag{6.4.7}$$