Упражнение 6.5. Показать, что для *радиальных* возмущений сферической звезды из формулы (6.3.18а) следует

$$\nabla_i \delta\Phi = -4\pi G\rho\xi^i. \tag{6.3.20}$$

Указание. Можно воспользоваться разложением функции $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^{-1}$ в сферических координатах.

6.4. РАВНОВЕСИЕ КАК УСЛОВИЕ ЭКСТРЕМУМА ЭНЕРГИИ

В этом разделе мы выведем вариационный принцип для уравнения гидростатического равновесия. Будет показано, что равновесие отвечает экстремуму энергии данной конфигурации.

Полная энергия имеет вид

$$E = T + U + W, \tag{6.4.1}$$

где

$$T = \int \frac{1}{2} v^2 \rho \, d^3x \tag{6.4.2}$$

— кинетическая энергия,

$$U = \int u\rho \, d^3x \tag{6.4.3}$$

— внутренняя энергия и

$$W = \int \frac{1}{2} \Phi\rho \, d^3x \tag{6.4.4}$$

— гравитационная потенциальная энергия.

Ограничимся случаем статического равновесия ($\mathbf{v} = 0$). При этом $\delta T = 0$ в первом порядке по всем возмущениям, и можно исключить кинетическую энергию из выражения вариационного принципа. Для внутренней энергии имеем

$$\delta U = \int \Delta u \, \rho \, d^3x = -\int P \nabla \cdot \boldsymbol{\xi} \, d^3x, \tag{6.4.5}$$

причем мы использовали формулы (6.3.11), (6.3.16) и (6.3.8). Интегрирование по частям дает (так как на поверхности $P = 0$)

$$\delta U = \int \nabla P \cdot \boldsymbol{\xi} \, d^3x. \tag{6.4.6}$$

Вариация W дает

$$\delta W = \frac{1}{2} \int [\delta\Phi \, \rho + \rho(\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla)\Phi] \, d^3x, \tag{6.4.7}$$

где были использованы равенства (6.3.11) и (6.2.3). Из (6.3.18) следует

$$\int \delta\Phi\, \rho\, d^3x = -G \iint \frac{\delta\rho' \rho}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x'\, d^3x$$
$$= \int \delta\rho\, \Phi\, d^3x = -\int \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{\xi}) \Phi\, d^3x = \int \rho(\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla) \Phi\, d^3x.$$

Таким образом,

$$\delta W = \int (\rho \nabla \Phi) \cdot \boldsymbol{\xi}\, d^3x. \tag{6.4.8}$$

Окончательно из (6.4.6) и (6.4.8) получаем

$$\delta E = \int (\nabla P + \rho \nabla \Phi) \cdot \boldsymbol{\xi}\, d^3x. \tag{6.4.9}$$

Следовательно, условие $\delta E = 0$ приводит к уравнению гидростатического равновесия (6.1.16).

Упражнение 6.6. Показать, что при наличии сферической симметрии

$$\Phi(r) = -\frac{Gm(r)}{r} + G\int_0^r 4\pi\rho r\, dr, \tag{6.4.10}$$

где

$$m(r) = \int_0^r 4\pi\rho r^2\, dr \tag{6.4.11}$$

— масса, заключенная внутри сферы радиуса r, и $\Phi(0) = \Phi'(0) = 0$.

Упражнение 6.7. Показать, что при наличии сферической симметрии

$$W = -\int \frac{Gm}{r} dm + \text{const}. \tag{6.4.12}$$

Указать элементарный способ получения первого члена в этой формуле и найти зависимость константы от граничного значения потенциала Φ.

Упражнение 6.8. а) Показать, что условие гидростатического равновесия может быть получено также из другого вариационного принципа, основанного на *эйлеровых* вариациях величин, характеризующих жидкость: найти экстремум E при условии, что полное число барионов N остается постоянным.

Указания. 1. Следует искать экстремум величины

$$I = E - \lambda N, \tag{6.4.13}$$

где множитель Лагранжа λ считается постоянным.

2. Используйте формулу (6.3.3) в виде

$$\delta I = \int_{V+\Delta V} \delta Q \, d^3x. \tag{6.4.14}$$

Это вполне оправдано, так как в объеме ΔV величина Q_0 равна нулю.

3. Учтите, что

$$\delta n = \frac{\delta \rho}{m_B}. \tag{6.4.15}$$

б) Каков физический смысл величины λ?

в) Показать, что E и N достигают экстремальных значений в одной и той же точке при варьировании вдоль однопараметрической последовательности равновесных моделей.

Замечание. При лагранжевом подходе не было необходимости налагать условие постоянства N в явном виде. Оно автоматически следует из формулы (6.3.8).

6.5. ВОЗМУЩЕНИЯ ВБЛИЗИ СОСТОЯНИЯ РАВНОВЕСИЯ

В этом разделе выводятся уравнения, которым удовлетворяют малые возмущения статической равновесной конфигурации. Эти уравнения полезны по двум причинам: а) они позволяют вычислить частоты и нормальные моды колебаний вблизи положения равновесия, б) они дают возможность выяснить вопрос об устойчивости равновесного состояния.

Динамика описывается возмущенным уравнением Эйлера:

$$\Delta\left(\frac{dv^i}{dt} + \frac{1}{\rho}\nabla_i P + \nabla_i \Phi \right) = 0. \tag{6.5.1}$$

Умножая это уравнение на ρ и используя формулы (6.2.8), (6.2.9), (6.1.16) и (6.2.4), получаем

$$\rho \frac{d^2\xi^i}{dt^2} - \frac{\Delta\rho}{\rho}\nabla_i P + \nabla_i \Delta P + \rho \nabla_i \Delta\Phi = 0. \tag{6.5.2}$$

Так как невозмущенная конфигурация является статической, d/dt можно заменить на $\partial/\partial t \equiv \partial_t$. Используя формулы (6.3.8), (6.2.3), (6.3.14) и (6.1.16), приводим это уравнение к виду

$$\rho \partial_t^2 \xi^i = L_{ij}\xi^j, \tag{6.5.3}$$

где

$$L_{ij}\xi^j \equiv \nabla_i\left(\Gamma_1 P \nabla_j \xi^j\right) - \left(\nabla_j \xi^j\right)\nabla_i P + \left(\nabla_i \xi^j\right)\nabla_j P -$$

$$- \rho \xi^j \nabla_j \nabla_i \Phi - \rho \nabla_i \delta\Phi. \tag{6.5.4}$$