где множитель Лагранжа λ считается постоянным.

2. Используйте формулу (6.3.3) в виде

$$\delta I = \int_{V+\Delta V} \delta Q \, d^3x. \tag{6.4.14}$$

Это вполне оправдано, так как в объеме ΔV величина Q_0 равна нулю.

3. Учтите, что

$$\delta n = \frac{\delta\rho}{m_{\text{B}}}. \tag{6.4.15}$$

б) Каков физический смысл величины λ?

в) Показать, что E и N достигают экстремальных значений в одной и той же точке при варьировании вдоль однопараметрической последовательности равновесных моделей.

Замечание. При лагранжевом подходе не было необходимости налагать условие постоянства N в явном виде. Оно автоматически следует из формулы (6.3.8).

6.5. ВОЗМУЩЕНИЯ ВБЛИЗИ СОСТОЯНИЯ РАВНОВЕСИЯ

В этом разделе выводятся уравнения, которым удовлетворяют малые возмущения статической равновесной конфигурации. Эти уравнения полезны по двум причинам: а) они позволяют вычислить частоты и нормальные моды колебаний вблизи положения равновесия, б) они дают возможность выяснить вопрос об устойчивости равновесного состояния.

Динамика описывается возмущенным уравнением Эйлера:

$$\Delta\left(\frac{dv^i}{dt} + \frac{1}{\rho}\nabla_i P + \nabla_i \Phi\right) = 0. \tag{6.5.1}$$

Умножая это уравнение на ρ и используя формулы (6.2.8), (6.2.9), (6.1.16) и (6.2.4), получаем

$$\rho\frac{d^2\xi^i}{dt^2} - \frac{\Delta\rho}{\rho}\nabla_i P + \nabla_i \Delta P + \rho\nabla_i \Delta\Phi = 0. \tag{6.5.2}$$

Так как невозмущенная конфигурация является статической, d/dt можно заменить на $\partial/\partial t \equiv \partial_t$. Используя формулы (6.3.8), (6.2.3), (6.3.14) и (6.1.16), приводим это уравнение к виду

$$\rho\,\partial_t^2 \xi^i = L_{ij}\xi^j, \tag{6.5.3}$$

где

$$L_{ij}\xi^j \equiv \nabla_i\left(\Gamma_1 P \nabla_j \xi^j\right) - \left(\nabla_j \xi^j\right)\nabla_i P + \left(\nabla_i \xi^j\right)\nabla_j P -$$

$$- \rho\xi^j \nabla_j \nabla_i \Phi - \rho\nabla_i \delta\Phi. \tag{6.5.4}$$

Все величины здесь выражены через ξ^i и невозмущенные переменные, так как $\nabla_i \delta\Phi$ можно найти из формул (6.3.19) или (6.3.20).

Уравнение (6.5.3) является уравнением движения для возмущений. Для ξ^i, зависящих от времени по закону $\exp(-i\omega t)$, получим уравнение

$$-\omega^2 \rho \xi^i = L_{ij}\xi^j. \tag{6.5.5}$$

Это уравнение, дополненное соответствующими граничными условиями для ξ^i, представляет собой линейную задачу на собственные значения для нормальных мод колебаний в звездах.

Упражнение 6.9. Показать, что уравнение на собственные значения для радиальных колебаний в сферической звезде имеет вид

$$\frac{d}{dr}\left(\Gamma_1 P \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\xi\right)\right) - \frac{4}{r}\frac{dP}{dr}\xi + \omega^2\rho\xi = 0, \tag{6.5.6}$$

где ξ означает радиальную составляющую вектора ξ.

Указание. Для исключения производных потенциала Φ используйте формулы (6.1.4) и (6.1.16).

Граничные условия для уравнения (6.5.6) записываются в виде

$$\xi = 0 \quad \text{при } r = 0, \tag{6.5.7}$$

$$\Delta P = 0 \quad \text{при } r = R. \tag{6.5.8}$$

В сферически-симметричном случае условие (6.5.7) очевидно, а формула (6.5.8) означает, что элемент жидкости у невозмущенной поверхности смещается к возмущенной поверхности. Так как в силу формул (6.3.14) и (6.3.8) имеем

$$\Delta P = -\Gamma_1 P \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\xi\right), \tag{6.5.9}$$

причем P обращается в нуль при $r=R$, то в общем случае достаточно потребовать выполнения условия

$$\xi \text{ конечно при } r=R. \tag{6.5.10}$$

Уравнение (6.5.6) с граничными условиями (6.5.7) и (6.5.10) является *задачей Штурма — Лиувилля*[1)] на собственные значения ω^2. Укажем некоторые результаты, следующие из теории таких уравнений.

1. Все собственные значения ω^2 вещественны.

[1)] См., например, книгу [414], разд. 6.3.

2. Эти собственные значения образуют бесконечную дискретную последовательность

$$\omega_0^2 < \omega_1^2 < \omega_2^2 \cdots .$$

3. Собственная функция ξ_0, соответствующая минимальному собственному значению ω_0^2, не имеет узлов на интервале $0<r<R$. Вообще говоря, собственная функция ξ_n имеет на этом интервале n узлов.

4. Собственные функции ξ_n ортогональны с весом ρr^2

$$\int_0^R \xi_n \xi_m \rho r^2\, dr = 0, \qquad m \neq n. \tag{6.5.11}$$

5. Функции ξ_n образуют полный базис для разложения любой функции, удовлетворяющей граничным условиям (6.5.7) и (6.5.10).

Из п.2 вытекает важное следствие: если низшая радиальная мода для звезды является устойчивой ($\omega_0^2 > 0$), то устойчивы все радиальные моды. И наоборот, если звезда радиально неустойчива, то быстрее всего развивается неустойчивость в низшей моде (среди отрицательных собственных значений ω_0^2 имеет наибольшую абсолютную величину).

Рассмотрим в качестве простого примера, допускающего аналитическое решение, развитие возмущений в однородной звезде, т.е. при постоянных ρ и Γ_1. Для однородной звезды в состоянии равновесия адиабатический показатель $\Gamma = \infty$ (несжимаемый газ), а показатель политропы $n=0$.

Упражнение 6.10. Показать, что для однородной звезды в состоянии равновесия

$$P = \frac{2\pi G\rho^2}{3}(R^2 - r^2). \tag{6.5.12}$$

Подставляя формулу (6.5.12) в уравнение (6.5.6) и производя упрощения, получим

$$(1 - x^2)\xi'' + \xi'\left(\frac{2}{x} - 4x\right) + \left(A - \frac{2}{x^2}\right)\xi = 0. \tag{6.5.13}$$

Здесь $x=r/R$, штрих означает производную по x, и

$$A = \frac{3\omega^2}{2\pi G\rho\Gamma_1} + \frac{8}{\Gamma_1} - 2. \tag{6.5.14}$$

Как обычно, ищем решение в виде ряда

$$\xi = \sum_0^{\infty} a_n x^{n+s}. \tag{6.5.15}$$

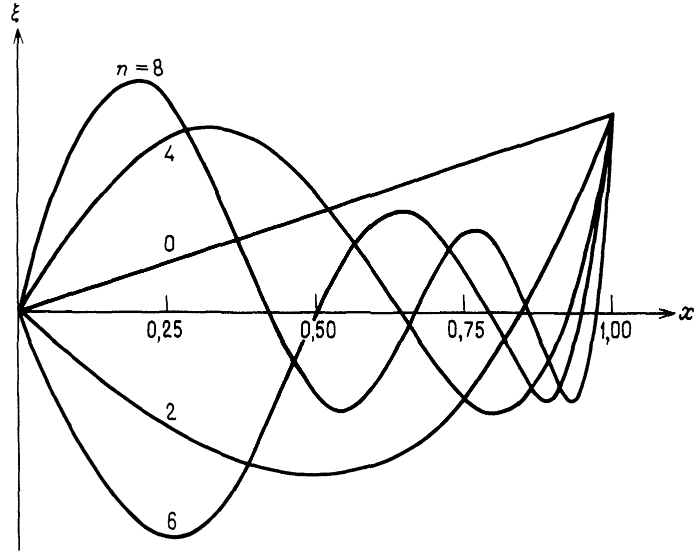

Рис. 6.1. Амплитуды радиальных колебаний для первых пяти мод в однородной модели.

Коэффициент при x^{s-2} дает нам уравнение для показателя степени:

$$(s+2)(s-1)=0. \tag{6.5.16}$$

Естественно, следует выбрать $s=1$, чтобы удовлетворить граничному условию (6.5.7). Далее находим $a_1=a_3=a_5=\ldots=0$, и

$$\frac{a_{n+2}}{a_n}=\frac{n^2+5n+4-A}{n^2+7n+10}, \qquad n=0,2,4,\ldots, \tag{6.5.17}$$

Ряд расходится, и поэтому он должен обрываться, если ξ удовлетворяет граничному условию (6.5.10). Таким образом, получаем требование

$$A=n^2+5n+4, \qquad n=0,2,4,\ldots \tag{6.5.18}$$

и в силу формулы (6.5.14)

$$\omega^2=\frac{2\pi G\rho}{3}\left[\Gamma_1(n^2+5n+6)-8\right], \qquad n=0,2,4\ldots. \tag{6.5.19}$$

Заметим, что звезда неустойчива при условии $\Gamma_1<4/3$. Это общий результат, и мы будем обсуждать и использовать его в разд. 6.7. Характерные времена устойчивых колебаний — порядка $(G\rho)^{-1/2}$, как и следовало ожидать из соображений размерности. На рис. 6.1 показаны амплитуды колебаний, нормированные на одинаковое значение при $r=R$. Заметим, что при $\Gamma_1=4/3$ решение для низшей моды $\xi \propto r$ и соответствует $\omega^2=0$. Как будет показано в разд. 6.7, этот результат также имеет общий характер.

Упражнение 6.11 (с использованием ЭВМ). Найти частоты нескольких низших устойчивых пульсаций для политропы с каким-нибудь показателем n при $\Gamma_1=5/3$.

Указания. а) Сделать безразмерным уравнение на собственные значения.

б) Найти функцию Лейна — Эмдена путем одновременного интегрирования уравнения Лейна — Эмдена (3.3.6) или использовать результаты, представленные в работе Серриса [519].

в) Исследовать аналитически поведение решения вблизи $r=0$ и $r=R$.

г) Возможный метод вычисления состоит в численном интегрировании уравнения от $r=0$ и $r=R$ к какому-нибудь подходящему значению r внутри звезды с выбранным наугад значением ω^2 и граничными условиями, определенными в п.в). Так как относительная величина этих двух решений заранее неизвестна, то можно начать каждое из них с единицы. Если значение ω^2 случайно угадано правильно, то вронскиан двух решений в точке сшивания r обратится в нуль (почему?). Вообще говоря, он отличен от нуля. Выберите другое ω^2, проинтегрируйте от границ к r и вновь найдите вронскиан. Теперь надо путем интерполяции или экстраполяции найти значение ω^2, при котором вронскиан обратится в нуль. Продолжайте итерацию до тех пор, пока ω^2 не будет найдено с заданной точностью.

6.6. ФУНКЦИЯ ЛАГРАНЖА ДЛЯ ВОЗМУЩЕНИЙ

Мы покажем в этом разделе, что уравнение (6.5.3), которому удовлетворяет возмущение, может быть выведено из вариационного принципа. Вариационный принцип полезен для приближенного решения уравнений для возмущений. Однако для нас более важно, что вариационный принцип приводит к критериям устойчивости, которые будут использоваться далее в этой книге.

Покажем прежде всего, что оператор L_{ij} в уравнении (6.5.4) симметричен, т.е.

$$\int \eta^i L_{ij} \xi^j \, d^3x = \int \xi^i L_{ij} \eta^j \, d^3x, \tag{6.6.1}$$

где ξ^i и η^i — произвольные лагранжевы смещения. Так как

$$\eta^i \nabla_i\left(\Gamma_1 P \nabla_j \xi^j\right) = \nabla_i\left(\eta^i \Gamma_1 P \nabla_j \xi^j\right) - \Gamma_1 P\left(\nabla_i \eta^i\right)\left(\nabla_j \xi^j\right), \tag{6.6.2}$$

и

$$\left(\eta^i \nabla_i \xi^j\right) \nabla_j P = \nabla_i\left(\eta^i \xi^j \nabla_j P\right) - \left(\nabla_i \eta^i\right) \xi^j \nabla_j P - \eta^i \xi^j \nabla_i \nabla_j P, \tag{6.6.3}$$

то из (6.5.4) следует

$$\int \eta^i L_{ij} \xi^j \, d^3x = -\int \Big[\Gamma_1 P\left(\nabla_i \eta^i\right)\left(\nabla_j \xi^j\right) + \left(\nabla_j \xi^j\right) \eta^i \nabla_i P +$$

$$+ \left(\nabla_i \eta^i\right) \xi^j \nabla_j P + \eta^i \xi^j\left(\nabla_i \nabla_j P + \rho \nabla_i \nabla_j \Phi\right) + \rho \eta^i \nabla_i \delta\Phi\Big] \, d^3x. \tag{6.6.4}$$